

# Partie IV

## Instabilité strato-rotationnelle



# 9

## Instabilité strato-rotationnelle

« La science progresse en indiquant  
l'immensité de l'ignoré. »

— L. Pauwels  
Ce que je crois

### Plan du chapitre

1. Instabilité et stratification .....	124
§ 59. Présentation .....	124
§ 60. Équations de base .....	125
§ 60.1. Approximation de Boussinesq .....	125
§ 60.2. Linéarisation .....	126
§ 61. Domaines de résolution .....	128
2. Solutions Exponentielles .....	129
§ 62. Nature des solutions et conditions aux limites .....	129
§ 62.3. Solutions .....	129
§ 62.4. Conditions aux limites .....	129
§ 63. Résultats .....	131
§ 63.5. Dérivation de la relation de dispersion .....	131
§ 63.6. Analyse .....	131
§ 63.7. Applicabilité dans les disques .....	132
3. Solutions Oscillantes .....	133
§ 64. Décomposition en domaines .....	133
§ 65. Raccordement asymptotique .....	134
§ 66. Dérivation d'une relation de dispersion .....	135
§ 67. Approche numérique de la relation de dispersion .....	137
4. Simulations Numériques .....	139
§ 68. Saturation et conditions aux limites .....	139
5. Discussion .....	140
§ 69. Article de Dubrulle et al. (2005b) .....	140
§ 70. Conclusion .....	141

## 1. Instabilité et stratification

### § 59. Présentation

**L**A STRATIFICATION VERTICALE DES DISQUES est un paramètre supplémentaire pouvant intervenir sur la dynamique des écoulements d'accrétion. En particulier, c'est cette stratification qui fixe l'échelle de longueur macroscopique la plus petite, au moins dans les disques froids. Dans cette partie, nous allons donc nous intéresser au rôle de cette stratification dans la physique des disques, et en particulier, à une instabilité pouvant apparaître dans les milieux stratifiés : l'instabilité strato-rotationnelle (ou SRI).

Cette instabilité n'a été étudiée que récemment dans la communauté astrophysique, mais elle est connue depuis plus de deux décennies en mécanique des fluides. Elle peut apparaître dans les écoulements de Couette plans tournants stratifiés verticalement, alors qu'ils sont localement linéairement stables vis-à-vis du critère de Solberg-Hoiland, valable pour des modes axisymétriques :

$$\frac{1}{R^3} \frac{\partial j^2}{\partial R} - \frac{1}{C_p \rho} \nabla p \cdot \nabla S > 0 \quad (59.199)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \left( \frac{\partial j^2}{\partial R} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial j^2}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial R} \right) < 0 \quad (59.200)$$

où l'on a noté  $j$  le moment cinétique,  $C_p$  la capacité calorifique et  $S$  l'entropie du gaz. On pourra reconnaître dans la première équation une extension du critère de Rayleigh  $2\Omega(2\Omega - S) > 0$  (Eq. 49.183). La seconde équation correspond au critère d'instabilité convective de Schwarzschild si l'on suppose  $\Omega = \Omega(R) = R^{-3/2}$  et  $\partial p / \partial z < 0$ , cette dernière égalité étant naturellement vraie dans un disque<sup>21</sup>. On obtient alors le critère classique pour un gaz parfait  $dT/dz + g/c_p > 0$ , où  $T(z)$  est le profil de température,  $g$  est la gravité et  $c_p$  est la capacité calorifique à pression constante.

L'instabilité strato-rotationnelle a été étudiée initialement, sous une forme légèrement différente et sans rotation, par Satomura (1981). Par la suite, une étude approfondie, à la fois analytique et numérique (Yavneh *et al.* 2001), a montré qu'elle apparaissait pour tout écoulement de Couette-Taylor anticyclonique ( $\Omega/S > 0$ ), ce qui en fait un candidat de choix pour expliquer la turbulence dans les disques d'accrétion. La recherche de cette instabilité tant numériquement qu'analytiquement a dans un premier temps été un échec (Rüdiger *et al.* 2002). Par la suite, Brandenburg & Ruediger (2005) ont mis en évidence cette instabilité dans des simulations et ont montré que le transport de moment angulaire se faisait effectivement vers l'extérieur. Il apparaît cependant que son efficacité semble décroître quand le Reynolds augmente, ce qui la rend moins pertinente pour les disques astrophysiques. Dubrulle *et al.* (2005b) ont argumenté, à l'aide d'une analyse WKB et d'un argument énergétique, que cette instabilité n'était pas simplement limitée aux cas des écoulements de Couette-Taylor ou de Couette plans, mais semblait indépendante des conditions aux limites. Ce problème des conditions aux limites a aussi été abordé par Umurhan (2006), en concluant que cette instabilité ne pouvait exister avec des conditions aux limites libres. Remarquons que ce point avait déjà été soulevé par Satomura (1981).

<sup>21</sup>On notera que dans le demi-plan inférieur d'un disque, cette égalité s'inverse, de même que le champ  $g$ , ce qui aboutit finalement au même critère d'instabilité.

Dans cette partie, je vais donc décrire les principales caractéristiques de cette instabilité. En particulier, je m'attacherai à donner un point de vue clair sur le rôle des conditions aux limites, et l'implication de cette instabilité sur la physique des disques. Cette partie, essentiellement analytique, sera ponctuée de quelques résultats numériques.

## § 60. Équations de base

### § 60.1. Approximation de Boussinesq

Dans un premier temps, considérons les équations de base dans le repère local du disque, tel que définit en introduction (§ 9 p. 22) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (60.201)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla P - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y e_y + \rho g(z) e_z \quad (60.202)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} P = -P(\gamma - 1) \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (60.203)$$

La stratification verticale est introduite via le terme  $g(z)$ , représentant la force par unité de masse due à la gravité locale. Pour un disque d'accrétion et dans le repère local considéré précédemment, supposé à une distance  $R_0$  de l'objet central, on a au premier ordre en  $z/R_0$  :

$$g(z) = -\frac{GM}{R_0^3} z \quad (60.204)$$

On notera en particulier que les effets de stratifications deviennent non négligeables lorsque l'on s'éloigne du plan médian  $z = 0$ . Dans ce travail, par soucis de simplification, nous ferons l'hypothèse d'une stratification verticale homogène en supposant  $g$  constant. Ceci revient à considérer une portion du disque de hauteur  $h$  centrée en  $z_0$  telle que  $h \ll z_0$ . Étant donné que nous voulons en tirer un transport non négligeable pour la physique de l'accrétion, il faudra se placer dans une zone relativement proche du plan médian, ce qui aboutit à  $h \ll z_0 < H$  où  $H$  est l'échelle de hauteur du disque. Remarquons que cette dernière hypothèse n'a pas d'influence sur le domaine d'existence d'instabilité (Umurhan 2006).

On remarquera que le système d'équations que l'on souhaite résoudre pour étudier cette instabilité est relativement complexe. Il convient alors d'éliminer les phénomènes physiques sans rapport avec l'instabilité que l'on souhaite étudier. On remarquera ainsi que ce système possède plusieurs modes propres, dont un mode acoustique. Comme nous nous intéressons ici à un couplage entre les effets de la force de Coriolis et l'effet inertiel de la stratification, les modes acoustiques sont à éliminer de notre problème. Pour se faire, on utilise l'approximation de Boussinesq, qui revient à fixer  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  sauf pour les effets de pousser d'Archimède. Les implications et limites de cette approximation sont discutées par Spiegel & Veronis (1960), et nous l'utiliserons simplement sous la forme :

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \psi - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + 2\Omega S y e_y + \theta e_z \quad (60.205)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = -u_z N^2 \quad (60.206)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (60.207)$$

où l'on note le terme de pression effective  $\psi = p'/\rho_0$  et le terme de température  $\theta = gT'/T_0$ . Les champs  $\rho_0$ ,  $P_0$  et  $T_0$  sont les états d'équilibre de l'écoulement et les écarts à l'équilibre sont notés avec un prime ( $T'$ ,  $p'$ ). Nous avons de plus introduit la fréquence de Brunt-Väisälä sous la forme :

$$N^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c_s^2} + g \partial_z \ln c_s^2 \quad (60.208)$$

où  $c_s$  est la vitesse du son ( $c_s^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ ). Cette quantité correspond à la fréquence d'oscillation d'une particule fluide le long de  $z$  lorsqu'elle est déplacée de son état d'équilibre sous l'effet de la force d'Archimède. On pourra ainsi remarquer que la condition de stabilité  $N^2 > 0$  correspond au critère de Schwarzschild discuté précédemment.

Afin d'obtenir un système linéaire, il convient d'écrire le système d'équations précédent en utilisant les déviations de l'écoulement par rapport à l'écoulement laminaire cisailé  $\mathbf{u} = Sye_x + v$ . On obtient alors en notant  $D_t = (\partial_t + Sy\partial_x + v \cdot \nabla)$  :

$$\begin{aligned} D_t v_x &= -\partial_x \psi + (2\Omega - S)v_y \\ D_t v_y &= -\partial_y \psi - 2\Omega v_x \\ D_t v_z &= -\partial_z \psi + \theta \\ D_t \theta &= -N^2 v_z \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

### § 60.2. Linéarisation

Afin d'étudier l'instabilité linéaire qu'est la SRI, on linéarise le système précédent de manière classique. On introduit alors des conditions aux limites homogènes dans les directions  $x$  et  $z$ , de sorte que l'on puisse utiliser des décompositions de Fourier :

$$\mathbf{X}(x, y, z) = \tilde{\mathbf{X}}(y) \exp [i(\omega t - \alpha x - \beta z)] \quad (60.209)$$

où  $\mathbf{X} = \mathbf{v}, \theta$  ou  $\psi$ . On réécrit alors le système linéarisé précédent sous la forme :

$$\begin{aligned} i\sigma \tilde{v}_x &= i\alpha \tilde{\psi} + (2\Omega - S)\tilde{v}_y \\ i\sigma \tilde{v}_y &= -\partial_y \tilde{\psi} - 2\Omega \tilde{v}_x \\ i\sigma \tilde{v}_z &= i\beta \tilde{\psi} + \tilde{\theta} \\ i\sigma \tilde{\theta} &= -N^2 \tilde{v}_z \\ 0 &= i\alpha \tilde{v}_x - \partial_y \tilde{v}_y + i\beta \tilde{v}_z \end{aligned}$$

avec :

$$\sigma = \omega - Sy\alpha \quad (60.210)$$

Ce système présente la particularité de ne pas pouvoir être simplifié en modes normaux dans la direction  $y$ . Ainsi, une décomposition en modes de Fourier cisailés (voir par exemple Goodman & Balbus 2001) conduit à l'élimination de l'instabilité, ces derniers n'étant pas une base complète de l'espace des solutions du système précédent. L'utilisation de modes de Fourier était justifié par la recherche d'une instabilité *locale*, c'est-à-dire indépendante des conditions aux limites. Dans le cadre de ce travail, on s'intéressera donc au cas le plus général, en incluant les instabilités globales potentielles et en faisant, le cas échéant, des hypothèses sur les conditions aux limites.

On conservera ainsi les équations précédentes sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires en  $y$ . On peut dans un premier temps réduire ce système à la manière de Umurhan (2006), ce qui permet d'obtenir :

$$i\tilde{\psi} \left( \alpha^2 + \frac{\beta^2 \sigma^2}{\sigma^2 - N^2} \right) = -\alpha(2\Omega - S)\tilde{v}_y + \sigma \partial_y \tilde{v}_y \quad (60.211)$$

$$\tilde{v}_y(\sigma^2 - \kappa^2) = i\sigma \partial_y \tilde{\psi} + i2\Omega\alpha\tilde{\psi} \quad (60.212)$$

où l'on a défini la fréquence épicyclique  $\kappa = 2\Omega(2\Omega - S)$ . On peut finalement obtenir une équation en  $\psi$  ou en  $v_y$ . Ces deux équations complémentaires permettent d'obtenir séparément des solutions simples dans différents régimes d'approximation. Dans cette étude, nous allons nous placer dans la limite où  $\sigma \ll N$  et  $\alpha \ll \beta$ . On définira alors une nouvelle variable  $\zeta$  de sorte que :

$$\zeta = \frac{\beta\sigma}{N\alpha} = O(1) \quad (60.213)$$

Cette variable nous servira dans la suite de variable spatiale, à la place de  $y$ . Elle permettra notamment de réduire la complexité des équations obtenues, et on pourra repasser simplement dans l'espace physique  $y$  une fois les solutions obtenues. On définit de plus un  $\zeta$  critique, noté  $\zeta_c = \beta\kappa/N\alpha$ , dont l'utilité apparaîtra dans la suite. Dans ce régime, on peut alors réécrire les équations précédentes sous la forme :

$$i\tilde{\psi}\alpha(1 - \zeta^2) = -(2\Omega - S)\tilde{v}_y - S\zeta\partial_\zeta\tilde{v}_y \quad (60.214)$$

$$\frac{\kappa^2}{\zeta_c^2}(\zeta^2 - \zeta_c^2)v_y = i\alpha(-S\zeta\partial_\zeta\tilde{\psi} + 2\Omega\tilde{\psi}) \quad (60.215)$$

Ce système simplifié permet d'obtenir 2 équations sur  $\tilde{\psi}$  et  $\tilde{v}_y$  ayant chacune une forme intéressante sur les domaines étudiés. Ainsi, bien qu'elles soient *a priori* redondantes, nous les dérivons toutes les deux. Quelques lignes d'algèbre permettent ainsi d'obtenir :

$$\partial_\zeta^2 \tilde{v}_y + \frac{2\zeta}{1 - \zeta^2} \partial_\zeta \tilde{v}_y = \left[ \frac{2(1 + R_\Omega)}{1 - \zeta^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left( 1 - \frac{\zeta^2}{\zeta_c^2} + \frac{1}{\zeta_c^2} \right) \right] \tilde{v}_y \quad (60.216)$$

$$\partial_\zeta^2 \tilde{\psi} + \frac{2\zeta}{\zeta_c^2 - \zeta^2} \partial_\zeta \tilde{\psi} = \left[ \frac{2R_\Omega}{\zeta_c^2 - \zeta^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left( 1 - \frac{\zeta^2}{\zeta_c^2} + \frac{1}{\zeta_c^2} \right) \right] \tilde{\psi} \quad (60.217)$$

On pourra alors éliminer les dérivés premières de chacune de ses équations en posant respectivement :

$$\tilde{w}_y = \frac{\tilde{v}_y}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (60.218)$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{\psi}}{\sqrt{\zeta_c^2 - \zeta^2}} \quad (60.219)$$

de sorte que l'on obtienne finalement les 2 équations :

$$\partial_\zeta^2 \tilde{w}_y - E_w(\zeta)\tilde{w}_y = 0 \quad (60.220)$$

$$\partial_\zeta^2 \tilde{\phi} - E_\phi(\zeta)\tilde{\phi} = 0$$

avec les fonctions  $E_j(\xi)$  de la forme

$$E_w(\xi) = \frac{1 + 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^2} + \frac{2(1 + R_\Omega)}{1 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \quad (60.221)$$

$$E_\phi(\xi) = \frac{\xi_c^2 + 2\xi^2}{(\xi_c^2 - \xi^2)^2} + \frac{2R_\Omega}{\xi_c^2 - \xi^2} + R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2} + \frac{1}{\xi_c^2}\right) \quad (60.222)$$

On fera par la suite l'hypothèse  $\xi_c \gg 1$  afin de négliger le dernier terme des fonctions  $E_j(\xi)$ . Remarquons que l'on pourrait *a priori* se passer de cette approximation sans modifier les conclusions de ce travail en définissant un nouveau  $\xi'_c$  tel que l'on puisse se ramener à un dernier terme de la forme  $1 - (\xi/\xi'_c)^2$ . Enfin, notons que ces équations sont symétriques en  $\xi$ , de sorte que l'on étudiera les solutions pour  $\xi > 0$  sans perdre en généralité.

Comme on peut le remarquer, les singularités apparentes dans les deux équations précédentes ne sont pas présentes au même endroit. En particulier, l'équation sur la pression est plus adaptée à l'étude des solutions au voisinage de 0 ( $\xi \ll \xi_c$ ), alors que l'équation de vitesse permet de comprendre le comportement au voisinage de  $\xi = \xi_c$ . Compte tenu de ces remarques nous allons décomposer le domaine de variation de  $\xi$  en différents sous domaines dans lesquels nous serons capables d'obtenir une solution analytique. On raccordera alors les différentes solutions par la méthode de raccordement asymptotique que je décrirai.

### § 61. Domaines de résolution

Commençons donc par décrire les différents domaines accessibles et les approximations des fonctions  $E_j(\xi)$  correspondantes.

- **Domaine (A) :**  $0 < \xi \ll \xi_c$ . Dans cette région, la forme la plus simple est obtenue pour l'équation en  $\phi$  où l'on trouve :

$$E_\phi(\xi) = R_\Omega(R_\Omega + 1) \quad (61.223)$$

On remarquera que les solutions obtenues pour  $\psi$  avec cette approximation sont des exponentielles. De manière plus générale, quand  $E_j(\xi) > 0$ , on parlera de solution exponentielle, dans le sens où la dérivée seconde et la fonction solution sont de même signe sur le domaine considéré. Remarquons que ce domaine correspond au domaine exponentiel de Umurhan (2006).

- **Domaine (B) :**  $1 \ll \xi < \xi_c$ . Ce domaine correspond à la transition entre le domaine (A) et le domaine  $\xi \sim \xi_c$ . On utilisera ici l'équation en  $\tilde{w}_y$  avec :

$$E_w(\xi) = R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi^2}{\xi_c^2}\right) \quad (61.224)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, la solution est de type exponentielle sur ce domaine.

- **Domaine (C) :**  $|(\xi_c - \xi)/\xi_c| \ll 1$ . Cette région correspond précisément au changement de signe de  $E_w$  lors du passage au travers de  $\xi_c$ . On pourra alors utiliser l'équation sur  $w_y$  avec :

$$E_w(\xi) = 2R_\Omega(R_\Omega + 1) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c}\right) \quad (61.225)$$

Remarquons que le changement de signe obtenu ici correspond à un changement de la nature de la solution, pour  $\xi > \xi_c$ , la solution adopte un comportement oscillant (la fonction et sa



dérivée seconde sont de signes contraires). Notons que la région  $\xi > \xi_c$  correspond aux solutions oscillantes de Dubrulle *et al.* (2005b).

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux solutions exponentielles, qui ont la forme la plus simple. En particulier, nous allons voir si ces solutions peuvent être sujettes à une instabilité, et à quelle condition.

## 2. Solutions Exponentielles

### § 62. Nature des solutions et conditions aux limites

#### § 62.1. Solutions

Dans le domaine (A), les solutions pour  $\psi$  s'obtiennent de manière évidente. De plus, le système (60.214) permet d'obtenir simplement les solutions pour le champ de vitesse. On obtient alors :

$$\tilde{v}_y(\xi) = \left( \xi \mp \sqrt{\frac{R_\Omega}{R_\Omega + 1}} \right) \exp \left( \pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \right) \quad (62.226)$$

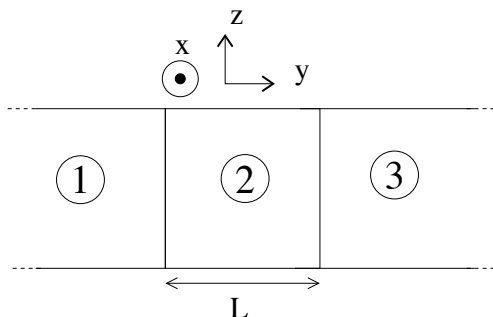
$$\tilde{\psi}(\xi) = \pm \frac{iS}{\alpha} \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \exp \left( \pm \xi \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} \right) \quad (62.227)$$

dans lesquels on a supposé  $R_\Omega < -1$  pour pouvoir se rapprocher du cas Képlérien.

Comme nous l'avons dit au début de ce chapitre, le problème de la présence ou non d'une instabilité dans cet écoulement semble relié aux conditions aux limites utilisées. En particulier, il semblerait que la présence de conditions aux limites rigides favorise l'apparition de modes instables. Dans cette étude, j'ai donc développé des conditions aux limites plus générales, qui permettent de tester toute une variété de conditions aux limites, en incluant la possibilité de murs.

#### § 62.2. Conditions aux limites

Considérons une section radiale de l'écoulement d'étude, avec de part et d'autre, deux milieux de paramètres physiques différents (Fig. 67). Chaque milieu se voit ainsi caractérisé par son profil de pression, de température, de densité et donc sa fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ . On supposera que les milieux encadrant le milieu d'étude sont infinis dans la direction  $y$  opposée à leur frontière. On remarquera de plus que ce type de conditions aux limites peut imiter la présence d'un mur, en supposant que les milieux (1) et (3) aient une densité beaucoup plus importante que le milieu d'étude.



**FIG. 67.** Conditions aux limites utilisées dans l'approche analytique. Le milieu d'étude (2) est entouré de 2 milieux (1) et (3) s'étendant respectivement jusqu'à  $-\infty$  et  $+\infty$ . Les propriétés d'équilibre de chacun des milieux sont *a priori* différentes et permettent de reproduire plusieurs types de conditions aux limites.

Dans la suite, on notera les propriétés d'équilibre en majuscule avec l'indice correspondant au milieu considéré (par ex.  $T_i(z)$ ,  $P_i(z)$ ,  $\rho_i(z)$ ,  $N_i(z)$  avec  $i = 1, 2, 3$ ). Les déviations à l'équilibre seront indexées de la même manière. De plus, par simplicité, on considérera que les milieux (1) et (3) ont les mêmes propriétés d'équilibre.

Comme on le voit sur la figure (67), l'équilibre du système composé des 3 milieux impose l'égalité des pressions aux interfaces. On écrit alors :

$$P_1(z) = P_2(z) \quad (62.228)$$

$$P_2(z) = P_3(z) \quad (62.229)$$

$$\tilde{p}_1(y = -L/2) = \tilde{p}_2(y = -L/2) \quad (62.230)$$

$$\tilde{p}_2(y = L/2) = \tilde{p}_3(y = L/2) \quad (62.231)$$

où l'on a supposé que les interfaces étaient placées en  $y = \pm L/2$ . De plus, comme les milieux (1) et (3) partagent les mêmes propriétés d'équilibre, les équations (62.228) et (62.229) sont équivalentes.

Pour obtenir une condition sur le champ de vitesse, nous allons suivre le mouvement d'une particule fluide au voisinage immédiat de cette interface. Ainsi, on suppose qu'une interface est positionnée en  $y = \zeta(x, z, t)$  et nous suivons une particule infiniment proche de l'interface, ayant pour coordonnées<sup>22</sup>  $(x_0, \zeta_0 + \varepsilon, z_0)$  à  $t = t_0$ . On définit alors un vecteur de déplacement  $\xi_i(t)$ , qui nous permet d'écrire les coordonnées de la particule à tout instant sous la forme  $(x_0 + \xi_{x_i}(t), \zeta_0 + \xi_{y_i}(t), z_0 + \xi_{z_i}(t))$ . Comme la particule est toujours infiniment proche de l'interface à  $t$ , on peut écrire :

$$\zeta(x_0 + \xi_{x_i}(t), z_0 + \xi_{z_i}(t), t) = \zeta_0 + \xi_{y_i}(t) \quad (62.232)$$

En utilisant la définition de la vitesse à partir d'un vecteur déplacement, et l'équation précédente, il vient naturellement :

$$\begin{aligned} v_{y_i}(x_0, \zeta_0, z_0) &\equiv \left( \frac{D\xi_{y_i}}{Dt} \right)_{t=t_0} \\ &\simeq \left( \partial_t \pm S \frac{L}{2} \partial_x \right) \zeta(x_0, z_0, t_0) \end{aligned} \quad (62.233)$$

que l'on écrira pour chaque interface située à  $y = \pm L/2$ . Notons que la dernière égalité est obtenue avec une linéarisation, ce qui n'est pas contraignant dans le cas de notre étude. Comme la position de l'interface ( $\zeta$ ) ne dépend naturellement pas du milieu considéré, cette dernière équation nous permet d'obtenir les relations de continuité recherchées :

$$v_{y_1}(x, -L/2, z) = v_{y_2}(x, -L/2, z) \quad (62.234)$$

$$v_{y_2}(x, L/2, z) = v_{y_3}(x, L/2, z) \quad (62.235)$$

Remarquons que de manière générale, ces relations de passage sont toujours vérifiées tant que la vitesse moyenne de l'écoulement (ici  $Sye_x$ ) est continue au passage à travers l'interface. En pratique, une discontinuité en vitesse tangentielle entraînerait une relation légèrement différente (Eq. 62.233) et engendrerait par exemple une instabilité de Kelvin-Helmholtz.

<sup>22</sup>La variable  $\varepsilon$  peut être soit positive soit négative. Ainsi, on peut suivre indifféremment une particule d'un côté ou de l'autre de l'interface.

## § 63. Résultats

### § 63.1. Dérivation de la relation de dispersion

Compte tenu de la configuration avec plusieurs milieux utilisée pour cette étude, on réécrit les solutions (62.226) et (62.227) sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{y_i}(y) &= A_i^+ \left( 2\Omega\alpha + k_{F_i}(\omega - Sy\alpha) \right) \exp\left(k_{F_i}y\right) \\ &+ A_i^- \left( 2\Omega\alpha - k_{F_i}(\omega - Sy\alpha) \right) \exp\left(-k_{F_i}y\right)\end{aligned}\quad (63.236)$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i(y) &= iA_i^+ \frac{\rho_i}{\alpha} \kappa^2 \exp\left(k_{F_i}y\right) \\ &+ iA_i^- \frac{\rho_i}{\alpha} \kappa^2 \exp\left(-k_{F_i}y\right)\end{aligned}\quad (63.237)$$

où l'on a utilisé les équations (60.210) et (60.213) pour définir le nombre d'onde de Froude  $k_F = \beta\kappa/N$ , ce dernier étant dépendant du milieu considéré via la fréquence de Brunt-Väisälä.

Remarquons que les solutions précédentes ne sont *a priori* pas valables pour  $\xi \rightarrow \pm\infty$  car on ne vérifie alors plus l'approximation  $|\sigma| \ll N$ . En pratique, il faudrait donc calculer les solutions en  $\pm\infty$  et effectuer le raccordement asymptotique jusqu'aux solutions (63.236) et (63.237). Ce raccordement n'ayant pu être fait dans le cadre de cette thèse, je me contenterai de supposer que les solutions (63.236) et (63.237) qui tendent vers 0 en  $\pm\infty$  se raccordent aux solutions asymptotiques qui vérifient effectivement ces limites.

Les conditions aux limites (62.230), (62.231), (62.234) et (62.235), ainsi que les conditions d'équilibre hydrostatiques (62.228) et (62.229) permettent alors d'obtenir la relation de dispersion (voir annexe C) :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_s^2 \\ &- \frac{2(1-r^{2/3})}{k_{F_2}G} \alpha \omega_c \omega_s (r \sinh(k_{F_2}L) + \cosh(k_{F_2}L)) \\ &+ \frac{\omega_c^2 \alpha^2 (1-r^{2/3})^2}{k_{F_2}^2 G} \sinh(k_{F_2}L)\end{aligned}\quad (63.238)$$

où l'on a posé  $r = (\rho_2/\rho_1)^{3/2}$  (contraste de densité) ;  $\omega_c = 2\Omega$  ;  $\omega_s = SL\alpha/2$  et :

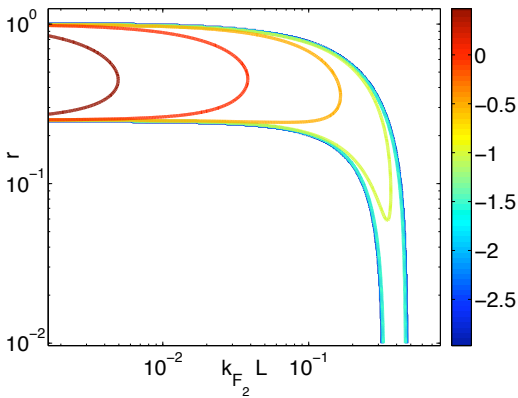
$$G = (r^2 + 1) \sinh(k_{F_2}L) + 2r \cosh(k_{F_2}L)$$

Il convient alors de faire une analyse de cette relation de dispersion afin de pouvoir conclure sur le rôle possible de cette instabilité dans les disques.

### § 63.2. Analyse

L'analyse de cette relation de dispersion montre que seul le second terme est susceptible de donner lieu à une instabilité. Dans le cas des disques ( $R_\Omega < 0$ ), l'instabilité n'apparaîtra que lorsque  $r < 1$ , c'est-à-dire lorsque le milieu est entouré de 2 zones plus denses. On pourra remarquer que dans le cas  $r = 1$ , correspondant à 3 milieux de même nature et donc un système homogène, l'instabilité disparaît (ce point rejoint une des conclusions de Umurhan 2006).

Dans le cas astrophysique, il est important de connaître les longueurs d'ondes pour lesquelles un disque pourrait être instable. Étant donné la complexité de la relation de dispersion, nous avons tracé  $\Im m(\omega)$  en fonction de  $k_{F_2}$  et  $r$  (Fig. 68). On retrouve sur ce graphique le fait que



**FIG. 68.** Tracé de  $\log(\Im(\omega)/S)$  d'après la relation de dispersion (63.238) dans le cas  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque que l'instabilité disparaît pour  $r > 1$  et que les plus grands nombres d'onde verticaux accessibles correspondent à  $r \rightarrow 0$ .

l'instabilité n'apparaît que pour  $r < 1$ . De plus, on voit que le plus grand  $k_{F_2}$  accessible correspond à la limite  $r \rightarrow 0$ .

Ce cas critique est analysable analytiquement. En effet, la relation de dispersion se réduit à :

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left( \tanh\left(\frac{k_{F_2} L}{2}\right) + \frac{2R_\Omega}{k_{F_2} L} \right) \left( \coth\left(\frac{k_{F_2} L}{2}\right) + \frac{2R_\Omega}{k_{F_2} L} \right) \quad (63.239)$$

On retrouve alors la relation de Umurhan (2006) dans le cas de conditions aux limites rigides. Dans le cas astrophysique ( $R_\Omega = -4/3$ ), on montre alors que l'instabilité apparaît pour des nombres d'ondes de Froude tels que :

$$2,07 < k_{F_2} L < 2,96 \quad (63.240)$$

### § 63.3. Applicabilité dans les disques

Le critère d'instabilité précédent doit être transposé dans les disques astrophysiques avant de pouvoir parler d'une éventuelle instabilité active. Comme nous l'avons dit, la stratification dans les disques est variable en fonction de la hauteur  $z$ . Cependant, on trouve comme ordre de grandeur une stratification typique telle que (Dubrulle *et al.* 2005b) :

$$N/\Omega \simeq 0,3 \quad (63.241)$$

L'instabilité devant être confinée dans le disque, la longueur d'onde verticale accessible est limitée par l'échelle de hauteur  $H$ . En particulier, on a en première approximation  $\beta > 2\pi/H$ . On peut alors réécrire la borne supérieure de (63.240) comme un critère reliant  $L$  et  $H$ , en prenant en compte la stratification (63.241) :

$$L < 0,14H \quad (63.242)$$

Ainsi, pour qu'apparaisse cette instabilité sous la forme de modes exponentiels, il faut que la distance entre 2 interfaces radiales successives soit plus petite qu'un dixième de l'échelle de hauteur. On peut donc imaginer que cette instabilité puisse se développer dans des anneaux étroits de faible densité (condition  $r < 1$ ), tels que la trace laissée dans le disque par une planète en formation. En revanche, il semble très peu probable d'observer de telles structures de manière uniforme dans le disque. Ainsi, l'instabilité strato-rotationnelle, bien que potentiellement intéressante pour les mécanismes de formation planétaire, ne semble pas permettre d'expliquer le transport observé dans les disques, du moins avec les solutions exponentielles.

### 3. Solutions Oscillantes

#### § 64. Décomposition en domaines

Les solutions oscillantes sont nettement plus difficiles à obtenir analytiquement. Ces solutions ont été décrites numériquement par Yavneh *et al.* (2001), puis Dubrulle *et al.* (2005b) ont tenté de les étudier analytiquement. Certains aspects de cette dernière analyse sont cependant discutables, et nous reviendrons sur ces résultats dans la suite. Pour obtenir ces modes, il convient de faire une résolution des équations (60.220) dans chacun des domaines décrit ci-dessus. Je ne reviendrai pas sur le domaine (A) pour lesquels les solutions ont été étudiées dans la section précédente.

• **Domaine (B)..** Dans ce domaine, la fonction  $E_w$  est lentement variable et ne change pas de signe, ce qui nous permet d'utiliser une solution WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin). Par simplicité nous noterons  $\bar{\zeta} = \zeta/\zeta_c$  et  $\lambda = \zeta_c \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}$ , ce qui nous permet d'écrire l'équation (63.241) sous la forme :

$$\partial_{\bar{\zeta}}^2 \tilde{w}_y - \lambda^2 (1 - \bar{\zeta}^2) \tilde{w}_y(\bar{\zeta}) = 0 \quad (64.243)$$

En pratique, l'approximation WKB consiste à considérer une fonction test composée d'une onde avec une phase à variation rapide, et d'une enveloppe à variation lente de la forme :

$$\tilde{w}_y = B(\bar{\zeta}) \exp(\phi(\bar{\zeta})) \quad (64.244)$$

En injectant cette solution dans l'équation (64.243) et en utilisant l'approximation précédente ( $B'/B \ll \phi'$ ), on obtient :

$$\tilde{w}_y = \frac{B^\varepsilon}{(1 - (\zeta/\zeta_c)^2)^{1/4}} \exp\left(\varepsilon \int_0^{\zeta/\zeta_c} \lambda \sqrt{1 - x^2} dx\right) \quad (64.245)$$

où  $\varepsilon = \pm 1$  et  $B^\varepsilon$  sont 2 constantes inconnues. Remarquons que cette solution n'est pas valide au voisinage de  $\zeta = \zeta_c$  car l'approximation WKB est alors violée. On ne peut donc atteindre directement le domaine oscillant avec cette solution.

• **Domaine (C)..** Dans ce domaine, la solution traverse la singularité  $\zeta = \zeta_c$  et passe donc d'un comportement exponentiel à un comportement oscillant. Pour isoler ce point, on définit la variable  $\zeta$  de telle sorte que  $\zeta = 0$  correspond au point  $\zeta = \zeta_c$  :

$$\zeta = -\left(2\zeta_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (\bar{\zeta}/\zeta_c - 1) \quad (64.246)$$

En utilisant la variable  $\zeta$ , l'équation (63.241) et l'expression (61.225) se simplifient sous la forme :

$$\partial_\zeta^2 \tilde{w}_y - \zeta \tilde{w}_y = 0 \quad (64.247)$$

Cette équation caractéristique a pour solution les fonctions d'Airy  $Ai(\zeta)$  et  $Bi(\zeta)$ . La solution formelle peut alors s'écrire, en reprenant les notations initiales :

$$\tilde{w}_y = C^- Ai\left[\left(2\zeta_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (1 - \zeta/\zeta_c)\right] + \quad (64.248)$$

$$C^+ Bi\left[\left(2\zeta_c^2 R_\Omega(R_\Omega + 1)\right)^{1/3} (1 - \zeta/\zeta_c)\right] \quad (64.249)$$

$C^+$  et  $C^-$  étant 2 constantes inconnues.

### § 65. Raccordement asymptotique

Afin de raccorder les différentes solutions dans chacun des domaines, nous allons utiliser la méthode des raccordements asymptotiques. Pour se faire, on prend la limite de chaque solution et on raccorde alors les limites des solutions en ajustant les constantes  $A^\pm$ ,  $B^\pm$  et  $C^\pm$ . Si les domaines choisis sont cohérents, ce type de raccordement doit se faire sans difficulté.

• **Raccordement de (A) et (B)..** En reprenant la solution du domaine (A) (62.226) avec  $\tilde{w}_y = \tilde{v}_y / \sqrt{1 - \zeta^2}$ , il vient naturellement :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tilde{w}_y(\zeta) = A^\pm \exp\left(\pm \zeta \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right)$$

De même, la solution du domaine (B) (64.245) nous donne :

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \tilde{w}_y(\zeta) = B^\pm \exp\left(\pm \zeta \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right)$$

Le raccordement asymptotique du domaine (A) et (B) nous permet donc d'obtenir simplement :

$$A^\pm = B^\pm \quad (65.250)$$

• **Raccordement de (B) et (C)..** La limite  $\zeta \rightarrow \zeta_c^-$  est plus difficile à obtenir. Remarquons tout d'abord que :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_c^-} \int_0^{\zeta/\zeta_c} \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right)^{3/2}$$

Cette égalité nous permet alors d'écrire la solution du domaine (B) dans la limite  $\zeta \rightarrow \zeta_c^-$  sous la forme :

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_c^-} \tilde{w}_y(\zeta) = B^\pm \frac{\exp(\pm \lambda \frac{\pi}{4})}{2^{1/4} (1 - \zeta/\zeta_c)^{1/4}} \exp\left[\mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right)^{3/2}\right] \quad (65.251)$$

De la même manière, les limites asymptotiques des fonctions d'Airy nous permettent d'écrire dans la limite  $\zeta \rightarrow \infty$  la solution (64.248) du domaine (C) sous la forme :

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \tilde{w}_y(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} [2\zeta_c^2 R_\Omega (R_\Omega - 1)]^{1/12} \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right)^{1/4}} \times \\ &\left( C^+ \exp\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right)^{3/2}\right] + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} C^- \exp\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} \lambda \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_c}\right)^{3/2}\right] \right) \end{aligned} \quad (65.252)$$

Pour finir, la comparaison des solutions (65.251) et (65.252) nous donne par identification le raccordement asymptotique :

$$C^+ = \mu \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{4}\right) B^- \quad (65.253)$$

$$C^- = 2\mu \exp\left(\frac{\lambda\pi}{4}\right) B^+ \quad (65.254)$$

$$\text{avec } \mu = \frac{\sqrt{\pi} \left(2\zeta_c^2 R_\Omega (R_\Omega - 1)\right)^{1/12}}{2^{1/4}} \quad (65.255)$$

Cette dernière égalité nous permet alors d'obtenir l'expression de la solution au travers des domaines (A), (B) et (C).

### § 66. Dérivation d'une relation de dispersion

Compte tenu de la complexité des solutions apparaissant dans le domaine (C), la dérivation d'une relation de dispersion est relativement fastidieuse. Dans un but de simplification, nous allons utiliser des conditions aux limites rigides, positionnées en  $y = L_-$  et  $y = L_+$ . De plus on posera :

$$\xi_{\pm} = -\frac{S\beta L_{\pm}}{N} \quad (66.256)$$

$$\xi_{\omega} = \frac{\beta\omega}{N\alpha} \quad (66.257)$$

de sorte qu'au niveau des murs gauche et droit, on puisse écrire  $\xi = \xi_{\pm} + \xi_{\omega}$ . Enfin, nous allons utiliser les comportements asymptotiques des fonctions d'Airy dans le domaine oscillant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Ai(-x) \sim \frac{\sin\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (66.258)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Bi(-x) \sim \frac{\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right)}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \quad (66.259)$$

On supposera alors que le mur gauche (indice -) se situe dans le domaine (A), alors que le mur droit est dans la partie oscillante du domaine (C). L'application de ces conditions aux limites aboutit alors au système :

$$0 = A^+ \left( \xi_- + \xi_{\omega} - \sqrt{\frac{R_{\Omega}}{R_{\Omega} + 1}} \right) \exp \left[ (\xi_- + \xi_{\omega}) \sqrt{R_{\Omega}(R_{\Omega} + 1)} \right] \quad (66.260)$$

$$+ A^- \left( \xi_- + \xi_{\omega} + \sqrt{\frac{R_{\Omega}}{R_{\Omega} + 1}} \right) \exp \left[ -(\xi_- + \xi_{\omega}) \sqrt{R_{\Omega}(R_{\Omega} + 1)} \right]$$

$$0 = A^+ \exp\left(\frac{\lambda\pi}{4}\right) \sin\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda\left(\frac{\xi_+ + \xi_{\omega}}{\xi_c} - 1\right)^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right] \quad (66.261)$$

$$A^- \exp\left(-\frac{\lambda\pi}{4}\right) \cos\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda\left(\frac{\xi_+ + \xi_{\omega}}{\xi_c} - 1\right)^{3/2} - \frac{1}{4}\pi\right]$$

Une solution non triviale est alors trouvée en résolvant l'équation de dispersion en  $\xi_{\omega}$  que l'on écrira sous la forme compacte :

$$\mathcal{D}(\xi_-, \xi_+, \xi_{\omega}) = \varepsilon EQ^- \cos(\Delta) - 2Q^+ \sin(\Delta) = 0 \quad (66.262)$$

où l'on a utilisé les expressions suivantes :

$$Q^\pm = \zeta_- + \zeta_\omega \pm \sqrt{\frac{R_\Omega}{R_\Omega + 1}} \quad (66.263)$$

$$\Delta = \Gamma P^3 - \frac{1}{4}\pi \quad (66.264)$$

$$\Gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda \quad (66.265)$$

$$\varepsilon = \exp\left[-\frac{\lambda\pi}{2}\right] \quad (66.266)$$

$$E = \exp\left[2(\zeta_- + \zeta_\omega)\sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)}\right] \quad (66.267)$$

$$P = \left(\frac{\zeta_+ + \zeta_\omega}{\zeta_c} - 1\right)^{1/2} \quad (66.268)$$

La résolution de cette équation en terme de  $\zeta_\omega$ , qui permettrait d'obtenir les régimes d'instabilité est loin d'être évidente. On va donc réaliser une série d'approximations afin d'obtenir le régime d'instabilité recherché. On suppose tout d'abord que  $|\zeta_\omega|$  est petit. En effectuant un développement à l'ordre 2 de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\zeta_\omega$ , il vient alors :

$$\zeta_\omega = \frac{-\mathcal{D}' \pm \sqrt{\mathcal{D}'^2 - 2\mathcal{D}''\mathcal{D}}}{\mathcal{D}''} \quad (66.269)$$

avec  $\mathcal{D}' = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \zeta_\omega}$ . L'instabilité sera alors obtenue lorsque la valeur sous la racine devient négatif. Remarquons de plus que le calcul de  $\mathcal{D}$  a été fait dans le régime  $\zeta_c \gg 1$  ce qui implique  $\varepsilon \ll 1$ . On effectue donc également un développement par rapport à  $\varepsilon$ . Ainsi, en posant :

$$\mathcal{D}(\zeta_-, \zeta_+, \zeta_\omega) = \varepsilon \mathcal{F}(\zeta_-, \zeta_+, \zeta_\omega) - \mathcal{G}(\zeta_-, \zeta_+, \zeta_\omega) \quad (66.270)$$

et en développant l'expression (66.269) à l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , il vient :

$$\zeta_\omega = \frac{-\mathcal{G}' \pm \sqrt{\mathcal{G}'^2 - 2\mathcal{G}''\mathcal{G}}}{\mathcal{G}''} \quad (66.271)$$

Remarquons tout d'abord que l'on peut choisir arbitrairement  $\mathcal{G}' = 0$ . En effet, on additionne ainsi à  $\zeta_\omega$  une constante réelle, ce qui revient physiquement à une translation des murs selon l'axe  $y$  et donc à un changement d'origine du référentiel. On écrira donc cette contrainte sous la forme :

$$\sin(\Delta) + \frac{3\Gamma}{2\zeta_c} Q_+ P \cos(\Delta) = 0 \quad (66.272)$$

De plus, on a :

$$\mathcal{G}'' = \frac{3\Gamma}{2\zeta_c} Q_+ P \cos(\Delta) \left( \frac{2}{Q_+} + \frac{1}{2P^2\zeta_c} \right) - \frac{9\Gamma^2}{4\zeta_c^2} Q_+ P^2 \sin(\Delta) \quad (66.273)$$

Ce qui, combiné à la contrainte (66.272) nous permet d'écrire :

$$\zeta_\omega = \sqrt{\frac{4}{Q_+^2} + \frac{1}{Q_+\zeta_c} + \frac{9\Gamma^2}{2\zeta_c^2} P^2} \quad (66.274)$$

Dans la limite utilisée jusqu'ici ( $\zeta_c \gg 1$ ), il apparaît donc que le développement à l'ordre 0 ne permet pas d'obtenir une instabilité. Pour obtenir l'éventuelle instabilité à l'ordre suivant, il faut donc annuler la contribution à  $\zeta_\omega$  de l'ordre 0. On posera donc :

$$\mathcal{G}(\zeta_-, \zeta_+, 0) = 0 \quad (66.275)$$



Cette contrainte, combinée avec la contrainte (66.272) nous impose alors :

$$Q_+ = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\Delta) = 0 \quad (66.276)$$

Ces contraintes nous fixant la position des murs, il reste à vérifier que l'on peut effectivement trouver un régime instable dans cette configuration. Pour cela, on développe (66.269) à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  en tenant compte des contraintes précédente. Il vient alors à l'ordre le plus bas :

$$\tilde{\zeta}_\omega = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{2 \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{G}''}} \quad (66.277)$$

que l'on écrira, en utilisant (66.274), sous la forme :

$$\tilde{\zeta}_\omega = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{EQ_- \tilde{\zeta}_c}{3\Gamma P}} \quad (66.278)$$

Cette dernière relation entraîne nécessairement la présence d'une instabilité. En effet, la contrainte  $Q_+ = 0$  entraîne  $\tilde{\zeta}_- = -\sqrt{R_\Omega/(R_\Omega + 1)}$  et  $Q_- = -2\sqrt{R_\Omega/(R_\Omega + 1)}$ . On retrouve donc bien un régime d'instabilité au voisinage de  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ . En reprenant les notations initiales et en utilisant le nombre de Froude épicyclique  $Fe = \kappa/N$  et en notant  $n$  le numéro du nœud du sinus utilisé pour satisfaire (66.276), on écrit le taux de croissance sous la forme :

$$\frac{\Im(\omega)}{\kappa} = 3^{-1/6} R_\Omega^{1/12} (R_\Omega + 1)^{-5/12} \left( \frac{\alpha}{Fe\beta} \right)^{5/6} \frac{\exp \left[ -\frac{\pi\beta}{2\alpha} Fe \sqrt{R_\Omega(R_\Omega + 1)} - R_\Omega \right]}{\left[ (n + \frac{1}{4})\pi \right]^{1/6}} \quad (66.279)$$

### § 67. Approche numérique de la relation de dispersion

On l'a vu précédemment, la dérivation d'une relation de dispersion pour le régime oscillant est complexe et fait intervenir de nombreuses approximations. Nous avons donc voulu effectuer une approche numérique de ce problème afin de vérifier les résultats analytiques. Pour ce faire, nous résolvons dans un premier temps, numériquement, l'équation (60.220) dans le cas générique (sans décomposition en domaines) avec une méthode d'intégration d'équations différentielles ordinaires pour  $\xi \in \mathbb{R}$ . Ceci nous permet de trouver deux solutions linéairement indépendantes que l'on notera  $\mathcal{S}_1(\xi)$  et  $\mathcal{S}_2(\xi)$ . On utilise alors les conditions aux limites rigides que l'on positionne en  $\tilde{\zeta}_-$  et  $\tilde{\zeta}_+$  de la même manière que dans le chapitre précédent. L'existence d'une solution non triviale à ce système impose alors :

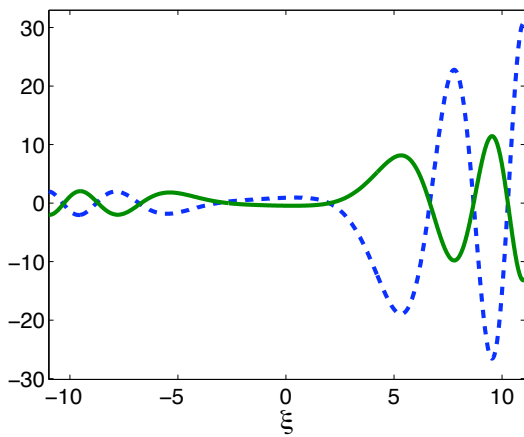
$$\mathcal{D}_n(\tilde{\zeta}_+, \tilde{\zeta}_-, \tilde{\zeta}_\omega) = \mathcal{S}_1(\tilde{\zeta}_+ + \tilde{\zeta}_\omega) \mathcal{S}_2(\tilde{\zeta}_- + \tilde{\zeta}_\omega) - \mathcal{S}_1(\tilde{\zeta}_- + \tilde{\zeta}_\omega) \mathcal{S}_2(\tilde{\zeta}_+ + \tilde{\zeta}_\omega) = 0 \quad (67.280)$$

où l'on a supposé que  $\tilde{\zeta}_\omega$  est réel. Compte tenu de la forme de l'équation différentielle utilisée, la solution doit être une fonction holomorphe sur le domaine de résolution. Ainsi, si l'on suppose à présent que  $\tilde{\zeta}_\omega$  est complexe, et  $\Im(\tilde{\zeta}_\omega) \ll 1$ , on obtient à l'ordre le plus bas, de la même manière que précédemment :

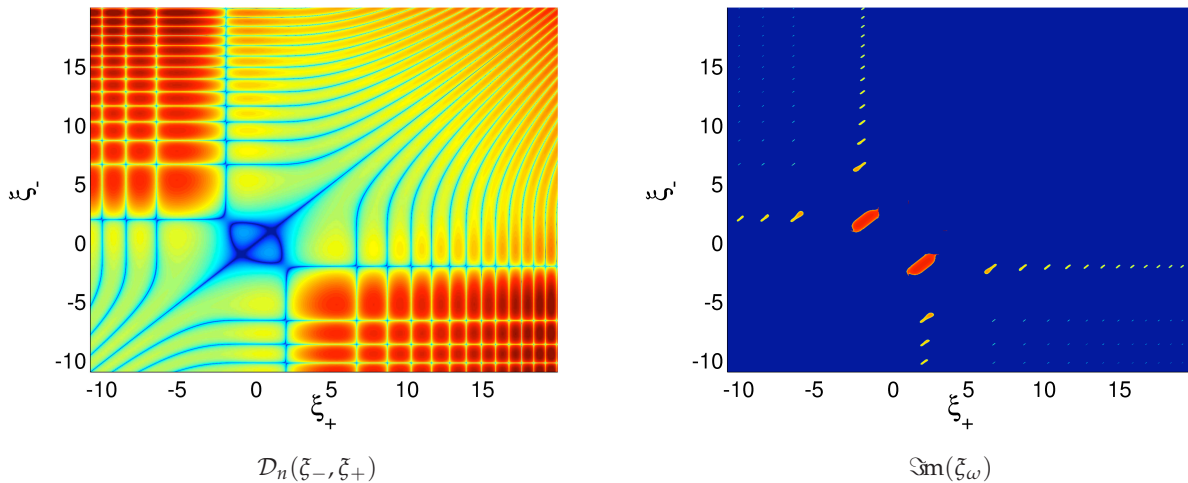
$$\Im(\tilde{\zeta}_\omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\mathcal{D}_n \mathcal{D}_n'' - \mathcal{D}_n'^2}}{\mathcal{D}_n''} & \text{si } 2\mathcal{D}_n \mathcal{D}_n'' - \mathcal{D}_n'^2 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (67.281)$$

avec  $\mathcal{D}_n' = \partial \mathcal{D}_n / \partial \tilde{\zeta}_\omega$ .

A titre d'exemple, j'ai effectué la procédure décrite ci-dessus pour  $\tilde{\zeta}_c = 3$  et  $R_\Omega = -4/3$ . On trouvera sur la figure (69) les solutions  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en fonction de  $\xi$ . A partir de ces solutions, j'ai



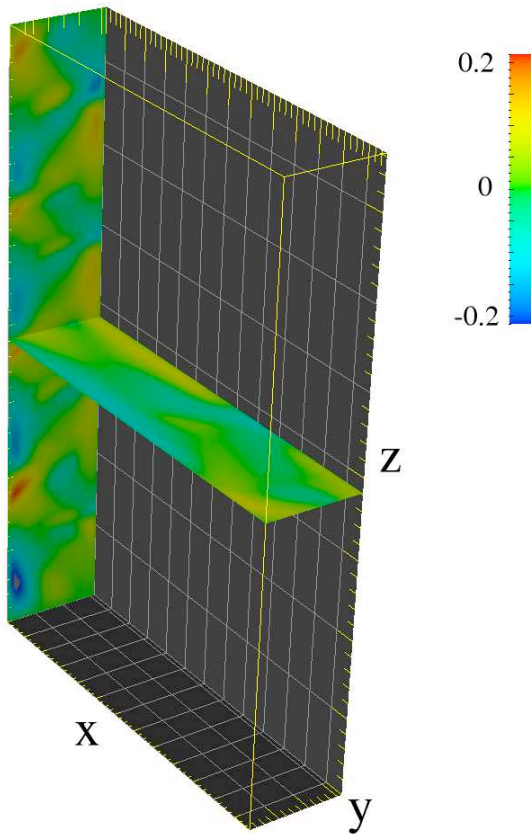
**FIG. 69.** Tracé des solutions numériques  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de  $\tilde{\zeta}$  pour  $\tilde{\zeta}_c = 3$  et  $R_\Omega = -4/3$ . On remarque le domaine exponentiel au voisinage de  $\tilde{\zeta} = 0$  et les oscillations pour  $|\tilde{\zeta}| > 3$ .



**FIG. 70.** Tracé du déterminant  $\mathcal{D}_n(\tilde{\zeta}_-, \tilde{\zeta}_+)$  et du taux de croissance  $\Im m(\tilde{\zeta}_\omega)$  d'après nos solutions numériques. On remarque que l'instabilité apparaît lorsque deux courbes d'annulation de  $\mathcal{D}_n$  se trouvent en rapprochement maximal. Ce résultat est similaire aux contraintes du résultat analytique  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ .

tracé  $\mathcal{D}_n(\tilde{\zeta}_-, \tilde{\zeta}_+, 0)$  et  $\Im m(\tilde{\zeta}_\omega)$  obtenus d'après (67.281) dans l'espace  $(\tilde{\zeta}_-, \tilde{\zeta}_+)$  sur la figure (70). On remarque sur cette figure la présence de courbes d'annulation de  $\mathcal{D}_n$  qui semblent se couper en certains points. Un examen attentif montre cependant que les courbes d'annulation ne font que se rapprocher et bifurquent à angle droit, sans se couper. De plus, les zones d'instabilité se trouvent au voisinage des points de bifurcation, comme le montre la figure de droite.

Ce résultat n'est pas sans rappeler la contrainte d'annulation que nous avons montré analytiquement  $Q_+ = 0$  et  $\sin(\Delta) = 0$ . Avec les valeurs numériques utilisées pour les solutions précédentes, la condition  $Q_+ = 0$  correspond à  $\tilde{\zeta}_- = -4/3$  et  $\sin(\Delta) = 0$  à  $\tilde{\zeta}_+ = 5,89 ; 8,24 ; 10,25$ . On peut vérifier sur la figure (70) que chacun de ces points correspondent effectivement à une région d'instabilité. Ainsi, les solutions analytiques instables oscillantes que nous avons trouvées correspondent à la branche  $(\tilde{\zeta}_- = -4/3, \tilde{\zeta}_+ > 5)$  visible sur la figure. On pourra de plus vérifier que les solutions instables au voisinage de  $(\tilde{\zeta}_+ = 4/3, \tilde{\zeta}_- = -4/3)$  correspondent aux solutions exponentielles étudiées dans la section précédente.



**FIG. 71.** Mise en évidence de la SRI dans un écoulement de Couette plan stratifié verticalement. Tracé de  $v_z$  pour  $F = 1.54$ ,  $R_\Omega = -4/3$  et  $Re = 3000$ . La structure observée est stationnaire et correspond au régime d'instabilité décrit par les modes exponentiels.

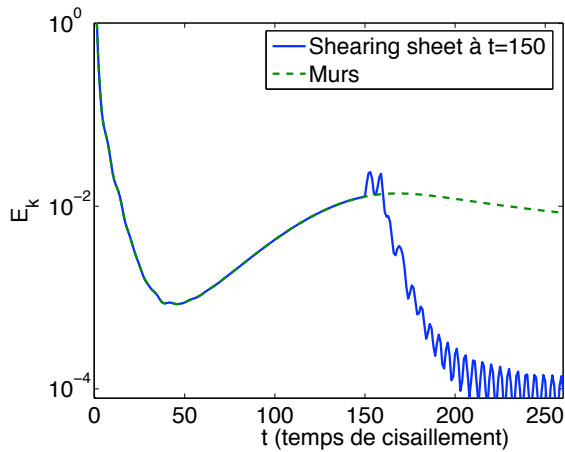
On remarquera aussi d'autres familles d'instabilités oscillant des deux cotés pour  $\xi_+ > 5$  et  $\xi_- < -5$ . Notons enfin que cette instabilité n'apparaît que lorsque  $\xi_+ \xi_- < 0$  ce qui correspond à une solution passant nécessairement par  $\xi = 0$ . Ce point avait été remarqué par Yavneh *et al.* (2001) et semble vérifié de manière plus générale ici. Il serait intéressant de pouvoir fournir une explication pour pouvoir en tirer un critère plus général d'instabilité.

On vérifie de plus ici que les solutions exponentielles ne sont qu'un cas particulier que l'on peut étudier facilement analytiquement d'une grande famille de solutions instables, qui sont généralement oscillantes. Je n'ai pas effectué le calcul dans le cas de conditions aux limites plus générales telles que celles utilisées pour les modes exponentiels. Il semble cependant fort probable que les modes oscillants, tous comme les modes exponentiels, nécessiteront des conditions aux limites rigides pour être instables et donneront des contraintes sur le disque similaires à ces derniers.

## 4. Simulations Numériques

### § 68. Saturation et conditions aux limites

Afin de tester les résultats analytiques, j'ai effectué quelques simulations de cette instabilité avec le code aux différences finies. Le système d'équations différentielles non linéaires complet du système a ainsi été traité, dans une boîte de taille  $L_x = 10$ ,  $L_y = 1$ ,  $L_z = 15$  et une résolution de  $128 \times 64 \times 192$ . J'ai de plus ajouté une viscosité dont le Reynolds associé est fixé à 3000. Le nombre de Froude est fixé à 1.54 et je me place au régime képlerien  $R_\Omega = -4/3$ . Les conditions aux limites sont périodiques en  $x$ , shearing-sheet ou murs en  $y$ , et libres en  $z$ .



**FIG. 72.** Remplacement des conditions aux limites rigides par des conditions aux limites shearing sheet dans une simulation ayant développé la SRI. On voit nettement que l'instabilité disparaît après de brèves oscillations à  $t = 150$ .

Les simulations avec murs montrent assez rapidement l'apparition de l'instabilité (Fig. 71) sous forme d'une structure stationnaire, apparemment peu modifiée par les interactions non linéaires. Le transport obtenu est assez faible :  $\langle v_x v_y \rangle \simeq 10^{-3} S^2 L_y^2$ . Par ailleurs, on remarquera que dans le régime de paramètres de la simulation et d'après (63.240), les modes exponentiels sont instables pour une longueur d'onde verticale  $\lambda_z$  telle que :

$$3,25 < \frac{\lambda_z}{L_y} < 4,67 \quad (68.282)$$

ce qui correspond grossièrement à 1/4 de la taille verticale de la boîte de simulation. On pourra vérifier facilement que la structure observée sur la figure (71) correspond à ce régime d'instabilité, la simulation semble donc dominée par les modes exponentiels.

Une fois l'instabilité développée dans une simulation, il peut être intéressant de modifier les conditions aux limites, afin de remplacer les murs par des conditions aux limites correspondant mieux à la physique des disques d'accrétion : les conditions shearing sheet. J'ai effectué un tel test sur la simulation de la figure (71). Pour ce faire, je laisse l'instabilité se développer jusqu'à  $t = 150 S^{-1}$ . A cet instant, les murs dans la direction  $y$  sont remplacés par des conditions aux limites shearing sheet. Le tracé de l'énergie cinétique turbulente (72) montre clairement qu'après une brève relaxation oscillante due au changement des conditions aux limites, l'écoulement retourne rapidement dans un état laminaire. Ce point conforte l'une des conclusions obtenue précédemment : l'existence de la SRI semble liée à la présence de murs, et son éventuelle existence dans les disques est liée à la présence de structures radiales *a priori* difficiles à former.

## 5. Discussion

### § 69. Article de Dubrulle *et al.* (2005b)

Comme on l'a vu, nos résultats sont en contradiction avec les résultats de Dubrulle *et al.* (2005b). En particulier, les conditions aux limites qui ne semblent avoir qu'un impact faible sur l'instabilité d'après Dubrulle *et al.* (2005b), ont un rôle très important dans notre étude. Pour expliquer cette différence, reprenons les arguments de cet article.

- **Argument énergétique.** Le premier argument avancé est un argument de minimisation énergétique. Ce dernier donne une condition suffisante de stabilité dans la limite étudiée. Dans

ce cas, il est montré que la condition de stabilité est  $R_\Omega > 0$ . Comme il est signalé dans l'article, cet argument ne permet pas de conclure à l'existence d'une instabilité dans le cas  $R_\Omega < 0$ .

- **Étude WKB.** L'étude WKB effectuée par Dubrulle *et al.* (2005b) est similaire à celle que nous avons effectuée dans le domaine (B). Elle leur permet d'obtenir les solutions exponentielles dans le cas  $\zeta \ll \zeta_c$ , identiques à celle de notre étude. Cependant, il n'est pas montré que ces modes sont instables pour des conditions aux limites quelconques, et seule une référence aux modes exponentiels de Yavneh *et al.* (2001), étudiés avec des conditions aux limites rigides, est fournie pour justifier l'instabilité.

Cette étude WKB leur permet aussi de mettre en évidence des modes oscillants. Pour ces modes, Dubrulle *et al.* (2005b) se placent dans la limite  $|\sigma^2 - N^2| \ll N^2$  (passage de l'équation (36) à (37) de l'article). Il se trouve que dans ce domaine, l'approximation WKB proposée est fautive, car l'enveloppe de la solution obtenue varie beaucoup plus rapidement que sa phase (équation (41) de l'article). Les solutions oscillantes de Dubrulle *et al.* (2005b) ne sont donc pas valides.

De plus, une relation de dispersion est obtenue à partir de ces modes oscillants en imposant une condition aux limites de type mur ( $v_y = 0$ ) ou libre ( $P = 0$ ). Cette relation ne permettant pas d'obtenir une expression analytique de l'instabilité, des modes « neutres » ( $\Im(\omega) = 0$ ) sont recherchés. Remarquons cependant qu'il ne s'agit pas ici de modes neutres correspondant à un seuil d'instabilité car aucun mode instable n'est mis en évidence dans cette relation de dispersion. De plus, comme ces solutions ne passent pas par  $\zeta = 0$ , on s'attend à obtenir uniquement des modes stables (voir § 67).

- **Étude Numérique.** L'étude numérique effectuée dans cet article est basée sur la résolution du système d'équations linéarisé, en incluant une dissipation visqueuse et une conductivité thermique. Nous ne rentrerons pas dans le détail de la procédure numérique utilisée, mais retenons simplement que les conditions aux limites utilisées dans la direction  $y$  sont de type *stress-free* et impliquent donc  $v_y = 0$  sur les bords. Cette étude numérique est donc effectuée avec une sous classe des conditions aux limites rigides.

On le comprend donc, aucun des arguments avancés dans cet article ne permet d'affirmer que la SRI apparaît indépendamment des conditions aux limites, contrairement à ce qui est avancé.

## § 70. Conclusion

On l'a vu, l'instabilité strato-rotationnelle, en faisant intervenir les effets de stratification et de force de Coriolis, est assez difficile à approcher et un critère général d'instabilité reste à trouver. Le mécanisme physique lui-même, à l'origine de l'instabilité reste à déterminer. Une piste est de considérer la SRI comme une interaction entre des ondes de densité dues à la stratification, et des ondes de Kelvin<sup>23</sup>, résultat de l'interaction au voisinage d'une paroi entre la force de Coriolis et la pression. L'instabilité serait alors due à la superposition de deux ondes de Kelvin allant en sens contraire le long de chacun des murs. Ce schéma permettrait alors d'expliquer la dépendance de

<sup>23</sup>Les ondes de Kelvin sont assez étudiées en océanographie. En effet, elles peuvent suivre le contour des côtes océaniques ainsi que l'équateur et sont en partie responsables de phénomènes climatiques locaux tel que *El Niño*

la SRI vis-à-vis des conditions aux limites. Cependant, cette description reste assez spéculative et doit être étudiée plus en détails.

Pour conclure, j'ai montré à travers cette partie que l'instabilité strato-rotationnelle est une instabilité pouvant apparaître dans les écoulements stratifiés cisailés en rotation. Des conditions aux limites type rigides, ou du moins, une zone radiale de faible densité semble nécessaire pour son existence. De plus, cette zone doit être relativement étroite (de taille inférieure à la hauteur du disque), ce qui fait de la SRI une instabilité peu probable dans le cas général d'un disque d'accrétion. Cependant, elle pourrait avoir un intérêt astrophysique au voisinage des zones de disque appauvries en gaz par le passage d'une planète en formation.