

Partie I

Introduction

1	Des disques d'accrétion dans l'univers?	3
2	Modèle physique et approximations	13

1

Des disques d'accrétion dans l'univers?

« Du chaos naît une étoile. »

— Charlie Chaplin

Plan du chapitre

1. Qu'est-ce qu'un disque d'accrétion?	3
§ 1. Le moment cinétique dans l'univers.....	3
§ 2. Formation de disques d'accrétion dans l'univers : entre théorie et observation	5
§ 2.1. Prototype de disque d'accrétion.....	5
§ 2.2. Noyaux actifs de galaxie	6
§ 2.3. Systèmes binaires	6
§ 2.4. Étoiles jeunes	7
§ 2.5. Des jets accompagnant les structures d'accrétion?.....	7
2. Le problème du transport du moment angulaire	8
§ 3. Différents processus de transport.....	8
§ 4. Sources de turbulence dans les disques.....	10
§ 5. Contraintes observationnelles et théoriques sur l'efficacité du transport.....	11
3. Objectifs de cette Thèse.....	12

1. Qu'est-ce qu'un disque d'accrétion?

§ 1. Le moment cinétique dans l'univers

DE MANIÈRE ASSEZ SURPRENANTE AU PREMIER ABORD, la nature semble favoriser les systèmes tournants aux échelles astronomiques. Ainsi, dans notre environnement immédiat, la lune tourne autour de la terre, qui tourne autour du soleil, tout comme les autres planètes. Ce type de comportement ne se limite pas à notre système solaire et semble observé dans toute notre galaxie. En fait, on peut expliquer ces observations assez facilement avec des ingrédients physiques simples.

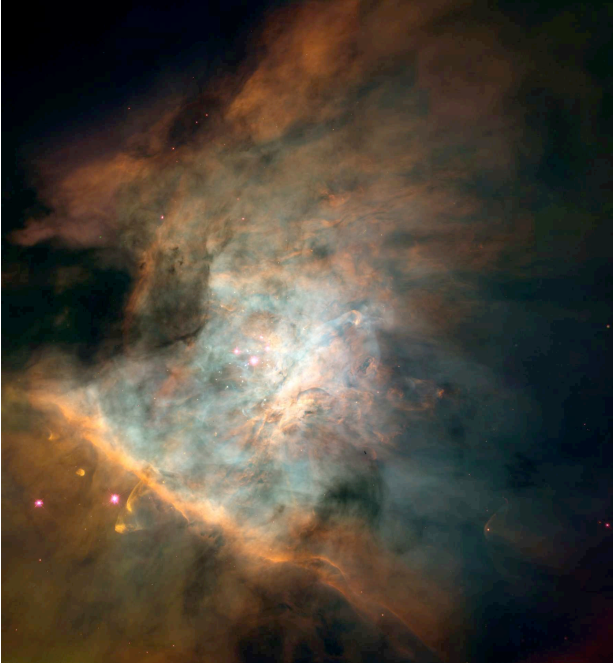


FIG. 1. Détail d'un nuage interstellaire en effondrement gravitationnel (nébuleuse d'Orion). On y remarque les premiers globules gazeux denses qui donneront des protoétoiles. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

En effet, aux échelles astronomiques, la force dominante est la force gravitationnelle, qui est uniquement attractive¹. L'essentiel de l'activité observée dans l'univers est donc lié à un mouvement de contraction des objets, éventuellement jusqu'au stade ultime décrit par la relativité générale : le trou noir. Cependant, cet effondrement des structures de l'univers ne serait pas aussi riche sans la conservation du moment cinétique. De la même manière qu'une patineuse effectuant une toupie augmente sa vitesse de rotation lorsqu'elle rapproche les bras de son corps, un nuage de gaz interstellaire (Fig. 1), possédant un moment cinétique initialement très faible, voit sa vitesse de rotation augmenter lorsqu'il se contracte.

Cependant, là où la patineuse arrive à se « contracter » d'un facteur de l'ordre de 2, soit une vitesse de rotation 4 fois plus rapide, le nuage interstellaire peut se contracter d'un facteur 1000, ce qui entraîne naturellement une augmentation conséquente de la rotation de l'objet. Ainsi, on atteint rapidement un stade où la force centrifuge équilibre plus ou moins la force gravitationnelle : l'objet « tourne ».

Dans ce chapitre, je vais m'intéresser à des structures qui sont le résultat de ce type de processus d'effondrement : les disques d'accrétion. Je présenterai dans un premier temps leur mécanisme de formation, ainsi que les différents objets astrophysiques dans lesquels on peut les retrouver. Je discuterai aussi de leur lien potentiel avec les phénomènes de jet puis j'étudierai quelques résultats observationnels. Je finirai en présentant les différents modèles théoriques envisageables, et en particulier comment mon travail de thèse s'articule dans cet ensemble.

¹Notons néanmoins qu'aux très grandes échelles, une énergie « sombre » semble avoir un effet répulsif et accélère l'expansion de l'Univers.



FIG. 2. Vue d'artiste d'un disque d'accrétion autour d'une étoile jeune. (Crédit David Darling)

§ 2. Formation de disques d'accrétion dans l'univers : entre théorie et observation

§ 2.1. *Prototype de disque d'accrétion*

Un disque d'accrétion est un fluide composé de gaz et de poussières, en rotation autour d'un objet central tel qu'une étoile jeune, une naine blanche, une étoile à neutron ou un trou noir (Fig. 2). Comme je l'ai présenté dans la section précédente, la matière du disque se trouve alors, en première approximation, en équilibre entre la force centrifuge et la gravitation de l'objet central (l'auto gravité du disque étant négligeable, ce dernier étant beaucoup moins massif que l'objet central). La matière du disque suit alors la troisième loi de Képler, qui pour une rotation circulaire s'écrit simplement $V \propto R^{-1/2}$. On parlera donc dans ce cas de disque « képlerien ».

Cependant, le gaz du disque ayant une viscosité non nulle², les couches radiales du disque « frottent » les unes contre les autres et transforment l'énergie mécanique en chaleur. La matière du disque tombe alors progressivement en spirale vers l'objet central en émettant un rayonnement dû au chauffage. On peut donc voir dans les disques d'accrétion un moyen efficace pour convertir l'énergie gravitationnelle en énergie thermique ou rayonnante. En pratique, on peut convertir 10% de l'énergie de masse du gaz par accrétion autour d'une étoile à neutron, valeur qui peut monter jusqu'à 40% autour d'un trou noir (Pringle 1981).

Historiquement, le paradigme du disque d'accrétion a été introduit par Kuiper (1941), en remarquant que le transfert de masse entre deux étoiles binaires en contact pouvait former un « anneau » de matière autour de l'étoile accrétante. Par la suite, le concept a été repris et étendu par Prendergast & Burbidge (1968) pour expliquer les caractéristiques de la binaire X Cyg X2 et par Lynden-Bell (1969) pour justifier la forte luminosité des noyaux actifs de galaxies. Les disques sont alors devenus un sujet d'étude à part entière, avec entre autres, le modèle standard de Shakura & Sunyaev (1973) que je discuterai dans la suite de ce chapitre.

On pense aujourd'hui que ces objets sont à l'œuvre dans une grande variété de phénomènes astrophysiques. En effet, on les rencontre dans les noyaux actifs de galaxie (NAGs), où l'objet central est un trou noir supermassif ($M \simeq 10^8 M_{\odot}$) ; dans les microquasars et variables cataclysmiques, systèmes binaires composés d'un objet dense (étoile à neutron, trou noir stellaire, naine blanche) accrétant la matière d'une étoile classique ; et autour des étoiles jeunes, où ils apparaissent, entre autres, comme des « pouponnières » à planètes.

²Le processus d'accrétion est en fait nettement plus compliqué, mais la physique fondamentale n'est pas modifiée par cette approche simplifiée.

§ 2.2. Noyaux actifs de galaxie

Le problème physique posé par les noyaux actifs de galaxie vient de la très grande puissance lumineuse émise (jusqu'à 10^{49} erg/s) sur une échelle caractéristique de quelques heures lumières (Lin & Papaloizou 1996). On peut alors montrer que seul un processus d'accrétion autour d'un objet très massif (trou noir d'une masse allant de $10^8 M_{\odot}$ à $10^{10} M_{\odot}$) peut être compatible avec les propriétés d'émission des NAGs.

Les moyens observationnels modernes ont permis de mettre en évidence de tels structures en imagerie directe. Ainsi, Jaffe *et al.* (1993) ont observé pour la première fois, avec le télescope spatial Hubble, une structure semblable à un disque d'accrétion entourant le cœur de la galaxie NGC 4261 (Fig. 3). Il semble néanmoins qu'il ne s'agisse ici que d'un tore de gaz entourant un disque d'accrétion central.

Les températures typiques observées dans ces disques sont de l'ordre de 10^4 K et leur rapport d'aspect (rapport entre la hauteur du disque et son rayon) sont de l'ordre de 10^{-2} , ce qui en fait des disques géométriquement minces (Lin & Papaloizou 1996).



FIG. 3. Tore de gaz au cœur de la galaxie NGC4261. La structure mise en évidence a une taille voisine de 400 années-lumière. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

§ 2.3. Systèmes binaires

Dans le cas d'un système binaire, la matière est accrétée depuis l'étoile compagne vers l'objet compact. On obtient ainsi un disque d'accrétion ainsi qu'un point chaud lors du contact entre le disque et le flux de matière provenant du compagne, entraînant localement une très forte dissipation (voir Fig. 4).

Il n'existe pas d'observation directe de tels disques d'accrétion, en raison de leur très petite taille. Cependant, on retrouve dans les spectres de ces objets des traces du point chaud ainsi que des décalages Doppler des raies d'émissions de Balmer caractéristiques de la présence d'un disque d'accrétion. Par ailleurs, dans les systèmes qui le permettent, les phénomènes d'éclipse du disque par le compagne permettent de caractériser précisément ce dernier (Lin & Papaloizou 1996; Balbus & Hawley 1998).

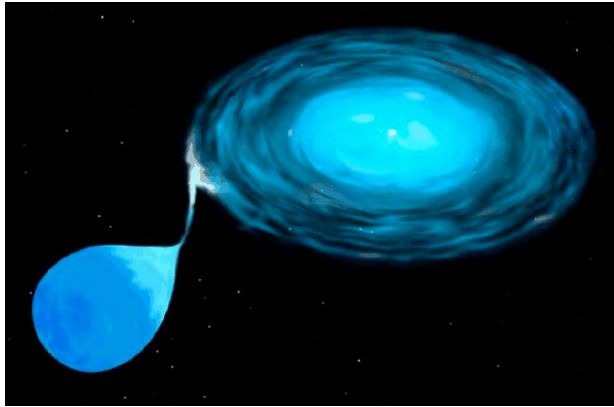


FIG. 4. Vue d'artiste d'un système binaire. Le gaz en surface de l'étoile compagne tombe vers l'objet compact en formant un disque d'accrétion. On remarque la présence d'un point chaud lorsque la matière tombant du compagne percute le disque. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

§ 2.4. Étoiles jeunes

Il a été remarqué assez tôt que les planètes de notre propre système solaire semblaient toutes, à un très bon niveau d'approximation, être présentes dans un même plan : l'écliptique. Ainsi, Laplace avait suggéré dès 1796 que les planètes se soient formées dans un disque de gaz et de poussières.

L'hypothèse de disques autour des étoiles jeunes a été reprise par Lynden-Bell & Pringle (1974) pour expliquer les propriétés des étoiles T-Tauri, une classe particulière d'étoiles en formation. Par la suite, des simulations numériques ont confirmé que le modèle de formation des étoiles par effondrement gravitationnel pouvait engendrer un disque d'accrétion (Terebey *et al.* 1984).

L'imagerie directe a permis par ailleurs de mettre en évidence des disques de poussière autour de certaines étoiles jeunes, sous la forme de bandes sombres masquant la protoétoile (Fig. 5). Ces disques de débris dans lesquels se forment des planètes seraient alors le stade ultime d'évolution des disques d'accrétion.

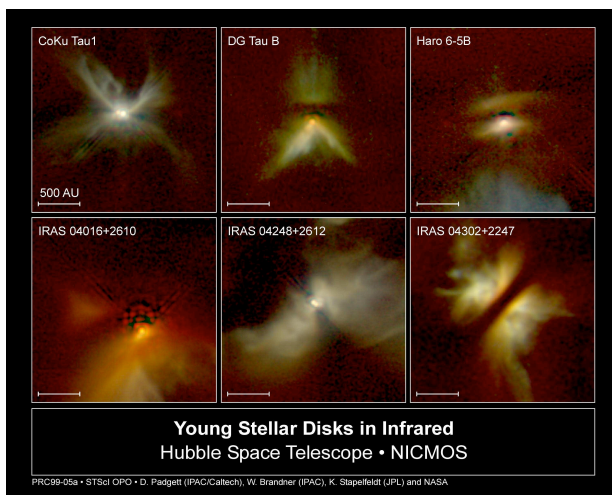


FIG. 5. Disques de débris autour d'étoiles jeunes vus dans l'infrarouge. (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

§ 2.5. Des jets accompagnant les structures d'accrétion?

Des jets astrophysiques peuvent être observés dans les premières phases de la formation stellaire jusqu'à la phase T-Tauri (voir Fig. 6). Ils ont dans ce cas des vitesses de l'ordre de 100 km/s et une taille typique de l'ordre du parsec. Des jets beaucoup plus gros sont observés dans les NAGs,

où les vitesses mesurées sont voisines de la vitesse de la lumière (voir parfois, en raison d'effets d'optique relativistes, superluminiques) sur des distances voisines de 10^6 pc. On observe aussi des jets dans les systèmes binaires comme les microquasars. Ils sont par ailleurs caractérisés par des écoulements très peu évasés, ce qui semble indiquer qu'ils sont dominés par des effets de collimation magnétique (Livio 1999).

Il semble que la plupart des phénomènes d'accrétion soient associés à des phénomènes d'éjection de type jet. Ainsi, par exemple, l'efficacité de l'accrétion dans les étoiles jeunes est reliée à l'intensité des jets observés (Cabrit 2002). De plus, l'existence d'un champ magnétique global ancré à l'intérieur du disque d'accrétion peut être un moyen efficace d'évacuer le moment cinétique du disque via un jet (Ferreira & Pelletier 1995).

On le comprend, la question de l'éjection semble étroitement reliée à celle de l'accrétion et il n'est pas impossible que la solution au problème de l'accrétion des disques passe par un modèle complet d'accrétion-éjection.

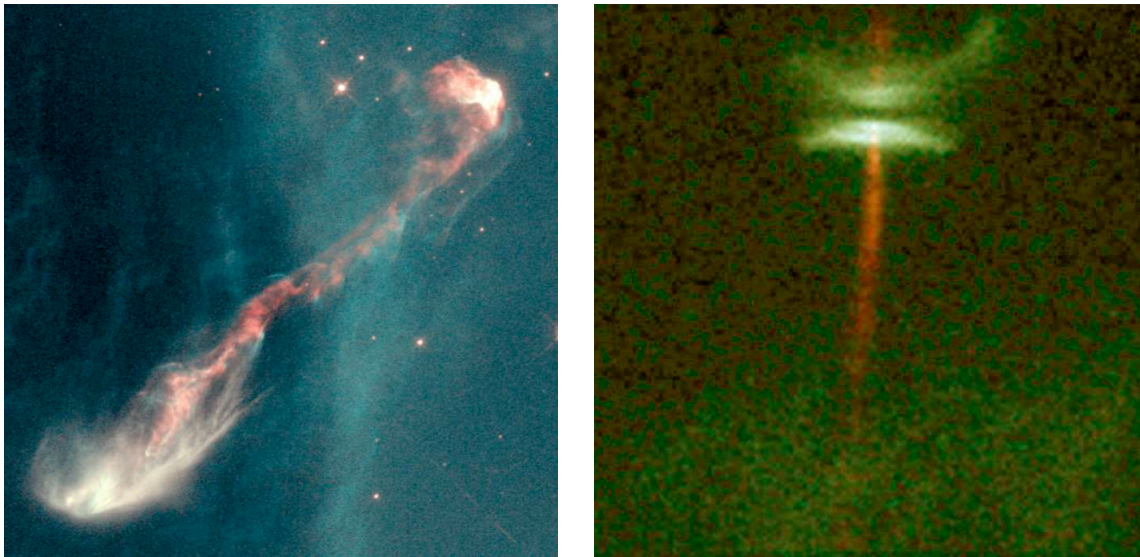


FIG. 6. Exemples de jets astrophysiques associés à des phénomènes d'accrétion. A gauche, on peut observer la trajectoire d'un jet de près de 500 pc, subissant de nombreux chocs avec le milieu interstellaire, ainsi que l'objet émetteur au centre (HH-47). A droite, on observe un disque d'accrétion en coupe (bande sombre) entourant une étoile en formation, ainsi que le début d'un jet partant perpendiculairement au plan du disque (HH-30). (Crédit Nasa/Space Telescope Science Institute)

2. Le problème du transport du moment angulaire

§ 3. Différents processus de transport

Comme je l'ai dit de manière préliminaire, l'accrétion du gaz vers l'objet central nécessite un processus physique capable d'extraire le moment angulaire de la matière en rotation, afin de briser l'équilibre entre la gravitation et la force centrifuge. Naturellement, la viscosité du fluide pourrait jouer ce rôle. Cependant, le calcul de la viscosité moléculaire collisionnelle du fluide (voir par exemple Spitzer 1962) montre que cette dernière est trop faible par plusieurs ordres de grandeur pour pouvoir expliquer les phénomènes observés, et en particulier les

temps caractéristiques d'évolution. Il faut donc trouver un (ou plusieurs) processus alternatifs d'extraction du moment angulaire.

- **Ondes globales.** L'existence d'ondes non axisymétriques, dues à des phénomènes de marée, a été proposée pour expliquer le transport de moment angulaire dans les disques (voir par exemple Papaloizou & Lin 1995 pour une revue de la littérature). Ce processus semble efficace, mais nécessite une source de dissymétrie, telle qu'une étoile compagne, ou encore l'inclinaison du disque par rapport à l'axe de rotation d'un trou noir de Kerr (Bardeen & Petterson 1975), ce qui le rend difficilement applicable dans le cas général. Par ailleurs, les ondes autogravitantes, à la manière des ondes spirales des galaxies, ont aussi été envisagées (Paczynski 1978; Kozłowski *et al.* 1979) et sont une autre source potentielle de transport pour les disques suffisamment froids.

- **Vent magnétohydrodynamique.** Comme je l'ai montré, il semble que l'existence de jets soit corrélée avec les structures d'accrétions. On peut dès lors concevoir que les jets sont un processus d'évacuation du moment angulaire du disque, par l'intermédiaire d'un champ magnétique. Ce type de processus, initialement proposé par Blandford & Payne (1982), suppose l'existence d'un champ magnétique poloidal ouvert, fixé au disque d'accrétion. La matière éjectée à la surface du disque suit alors les lignes de champ et extrait le moment cinétique de la surface de disque. Ce type de processus a depuis été étendu en un processus global d'accrétion-éjection, incluant à la fois la dynamique du disque et celle du jet, par des calculs auto-similaires (Ferreira 1995; Ferreira & Pelletier 1995) et des simulations numériques (Casse & Keppens 2002; Zanni *et al.* 2007). Il n'en reste pas moins que ce type de modèle nécessite la présence d'une résistivité anormale dans les disques que seule la turbulence semble pouvoir offrir (Ferreira 1997).

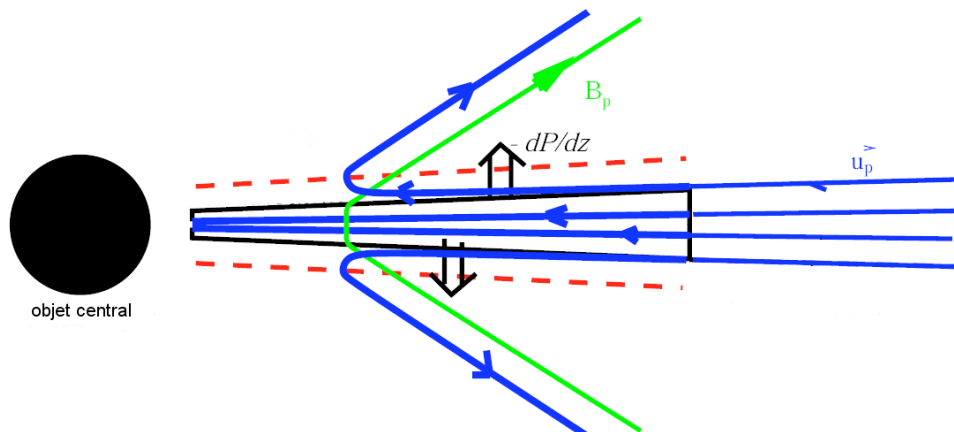


FIG. 7. Structure magnétique d'accrétion-éjection d'après Casse & Ferreira (2000). L'écoulement du gaz est représenté en bleu et le champ magnétique en vert. Lorsque la pression thermique parvient à pousser la matière sur les lignes de champs, l'effet « magnéto-centrifuge » éjecte la matière et retire du moment cinétique au disque. (Crédit F. Casse)

- **Turbulence.** Un processus de transport turbulent a été proposé dès les premiers modèles de disque par Shakura & Sunyaev (1973). Dans ces modèles (et aujourd'hui encore), la turbulence

est modélisée par une prescription *ad hoc*, basée sur une viscosité turbulente « effective » que l’on note :

$$\nu_t = \alpha c_s H \quad (3.1)$$

où c_s est la vitesse du son et H la hauteur du disque. Le coefficient α contient alors l’essentiel de la physique du disque et est fixé, soit par des contraintes observationnelles, soit par des considérations théoriques sur la turbulence des disques. Actuellement, beaucoup de modèles se contentent de cette description simple.

La turbulence semble donc être un processus assez prometteur pour expliquer le transport de moment cinétique dans les disques. De plus, elle est un ingrédient indispensable aux processus d’accrétion-éjection (Ferreira 1997). Cependant, le talon d’Achille de toute cette construction réside bien sûr dans la description de cette turbulence, cachée dans le paramètre α . On peut entre autre s’interroger sur son efficacité, ses propriétés statistiques, sa dépendance vis-à-vis des autres paramètres du problème (champ magnétique, densité, température...), sa variabilité, *etc.* Ces questions seront abordées dans ce manuscrit, en étudiant quelques unes des instabilités les plus prometteuses.

§ 4. Sources de turbulence dans les disques

La nature, voire l’existence même de la turbulence dans les disques est un problème trentenaire. La plus grosse difficulté vient de l’absence d’instabilité linéaire hydrodynamique « évidente » dans ces objets, telle que l’instabilité de Taylor-Couette. En pratique, on envisage donc certains processus physiques que l’on pense être à l’œuvre dans les disques, puis on étudie la stabilité du système par des méthodes analytiques, expérimentales ou numériques. La détection d’une instabilité n’apporte évidemment qu’une réponse partielle au problème, car il faut ensuite prévoir l’efficacité de la turbulence déclenchée par le processus, et la comparer aux observations. Force est de constater qu’à l’heure actuelle, peu d’instabilités répondent favorablement à cette dernière question...

Une première classe d’instabilité faisant intervenir le disque dans son ensemble est la classe des instabilités globales. On retrouve en particulier l’instabilité globale non axisymétrique de Papaloizou & Pringle (1984), pouvant apparaître dans les disques sub-képlerien (moment angulaire constant). Il semble cependant que cette instabilité soit peu pertinente pour induire une turbulence et un transport efficace dans des cas pratiques (Blaes 1987; Hawley 1991).

L’autre classe d’instabilité, beaucoup plus étudiée, recouvre les instabilités dites locales. Ces instabilités, peu dépendantes des conditions aux limites, peuvent être étudiées facilement en utilisant des modèles locaux de disques, tels que celui qui sera développé au deuxième chapitre. On retrouve dans cette classe l’instabilité sous-critique hydrodynamique, initialement suggérée par Lynden-Bell (1969) et Lynden-Bell & Pringle (1974), dont le moteur est simplement le cisaillement local du disque. Cette instabilité a donné lieu par la suite à un vif débat et on trouvera une discussion de ce mécanisme dans la troisième partie de ce manuscrit. Si l’on considère des effets de chauffage dans le plan du disque, il est possible de former une instabilité convective verticale, éventuellement source de transport de moment cinétique radial. Cependant, le transport obtenu est faible et va vers l’intérieur du disque, là où le modèle α prévoit un transport de moment cinétique vers l’extérieur (Cabot 1996; Stone & Balbus 1996). De plus, une stratification verticale stabilisante, couplée à la rotation et au cisaillement radial semble

engendrer une autre instabilité, dite strato-rotationnelle, que j'étudierai dans la quatrième partie. Il s'avèrera cependant que cette instabilité est de nature globale et non pertinente pour les disques.

Dans un autre contexte, Klahr & Bodenheimer (2003) ont montré que les disques étaient sensibles à une instabilité baroclinique, en raison d'un gradient radial d'entropie négatif. Leurs simulations montrent en particulier une turbulence apparemment développée et un transport du moment cinétique vers l'extérieur. Cependant, des analyses linéaires locales (Klahr 2004; Johnson & Gammie 2005) ainsi que des simulations numériques (Johnson & Gammie 2006) ont montré que l'on observait uniquement des croissances transitoires, et donc aucune turbulence entretenue.

Enfin, si l'on considère un disque couplé avec un champ magnétique, on trouve une instabilité linéaire puissante (Balbus & Hawley 1991a), produisant un transport vers l'extérieur, et pouvant potentiellement auto-entretenir son propre champ magnétique (Hawley *et al.* 1995; Brandenburg *et al.* 1995). Cette instabilité, dite magnéto-rotationnelle, sera le sujet de la dernière partie de ce travail.

§ 5. Contraintes observationnelles et théoriques sur l'efficacité du transport

On l'a vu, la description du transport de moment angulaire dans un disque d'accrétion se fait en pratique avec une prescription de viscosité turbulente, dite « prescription α ». Ce coefficient α peut être fixé à l'aide d'observations de disques et contraindre ainsi les modèles théoriques.

On pourrait s'attendre à obtenir des contraintes sur α via le spectre du disque que l'on observe. En effet, la turbulence, de la même manière qu'un couple visqueux classique, induit un chauffage local en transformant l'énergie mécanique du gaz accrété en énergie thermique³. Cette chaleur est alors transférée sous forme de rayonnement dans le milieu interstellaire et peut donner une signature spectrale caractéristique d'un disque d'accrétion (voir par exemple Blaes 2004 pour un calcul complet). Malheureusement ce type d'approche est peu contraignante sur α en raison de la faible dépendance du spectre par rapport à ce coefficient (King *et al.* 2007).

En pratique, on contraint donc α sur des phénomènes temporels. En effet, la viscosité turbulente donne accès à un temps caractéristique d'évolution du phénomène d'accrétion, lequel peut être relié à la variabilité observée dans les objets astrophysiques. Ainsi, on obtient pour les NAGs et les systèmes binaires $\alpha \simeq 0,1 - 0,4$ (Lin & Papaloizou 1996) et $\alpha \simeq 10^{-3} - 10^{-2}$ pour les étoiles jeunes (King *et al.* 2007).

Remarquons que d'autres contraintes peuvent être obtenues par des modèles théoriques. En particulier, les modèles d'accrétion-éjection auto-similaires montrent que le disque doit avoir une viscosité turbulente ainsi qu'une résistivité turbulente, (adimensionnalisée de la même manière que la viscosité) voisines de l'unité pour pouvoir éjecter de la matière (Casse & Ferreira 2000). Cette contrainte peut être relaxée jusqu'à un certain point, en supposant que la résistivité turbulente est anisotrope, c'est-à-dire qu'elle diffuse plus fortement le champ magnétique azimuthal que le champ poloidal. Par ailleurs, il semble que l'éjection n'a lieu que pour des champs magnétique proches de l'équipartition entre énergie thermique et magnétique

³Remarquons qu'en toute généralité, la turbulence peut aussi convertir l'énergie mécanique de l'écoulement en énergie magnétique, ou engendrer des phénomènes éruptifs qui ne sont pas décrits par la prescription α .

(Ferreira & Pelletier 1995), ce qui impose des contraintes supplémentaires sur l’intensité du champ magnétique, et donc sur les instabilités magnétohydrodynamiques.

3. Objectifs de cette Thèse

La dynamique des disques d’accrétion semble dominée par un phénomène de turbulence, dont l’origine reste encore aujourd’hui controversée. A travers ce manuscrit, je vais développer la physique de quelques unes des instabilités que j’ai discuté dans ce chapitre. Mes motivations sont doubles. D’une part, je souhaite caractériser une, ou plusieurs, instabilités capables d’engendrer une turbulence forte et susceptible d’expliquer le transport de moment cinétique requis par les observations, c’est à dire $\alpha \simeq 0,001—0,4$. D’autre part, je souhaite aller au delà du modèle α , en précisant l’efficacité de la turbulence en fonctions des différents paramètres physiques susceptibles d’intervenir, ceci pour obtenir de nouvelles contraintes sur les modèles, et pourquoi pas, des explications à certaines observations aujourd’hui mal comprises.

Ce travail de thèse s’entend donc être un premier pas vers un modèle de turbulence basé sur une véritable phénoménologie physique, tels que ceux que l’on peut rencontrer dans la communauté de la mécanique des fluides.

2

Modèle physique et approximations

Plan du chapitre

1. Modèle à un fluide	13
§ 6. Les équations de la magnétohydrodynamique	14
§ 6.1. Quelques grandeurs caractéristiques d'un plasma	14
§ 6.2. Équations du mouvement des ions	15
§ 6.3. Équation d'énergie, tenseur des contraintes	16
§ 6.4. Loi d'Ohm	17
§ 6.5. Équations de Maxwell	18
§ 6.6. Les équations de la MHD	19
§ 7. Application des équations MHD à la physique des disques d'accrétion	19
§ 7.7. Vérification des approximations MHD	19
§ 7.8. Approximation de la loi d'Ohm	20
2. Modèle local, approximation de Hill	21
§ 8. Nécessité d'un modèle local	21
§ 9. Développement des équations locales	22
§ 10. Équilibre vertical, compressibilité	23
3. Méthodologie	24

1. Modèle à un fluide

ÉTUDIER LA TURBULENCE DANS UN DISQUE D'ACCRÉTION signifie avoir un modèle représentant l'essentiel de la physique à l'œuvre dans ces objets. Dans ce chapitre, je vais donc expliciter le modèle fluide qui servira tout au long de ce manuscrit. Je vais dans un premier temps décrire l'approximation de la magnétohydrodynamique, et je montrerai en quoi elle est pertinente pour les objets que je souhaite étudier. Finalement, j'introduirai un modèle local de l'écoulement d'un disque d'accrétion, le modèle de Hill, qui servira de prototype pour étudier les instabilités.

§ 6. Les équations de la magnétohydrodynamique

Notons que je ne discuterai ici que du modèle de la magnétohydrodynamique collisionnelle des milieux totalement ionisés. On pourra trouver d'autres modèles, valides dans différents régimes d'approximation (MHD non collisionnelle, modèle à deux fluides...) dans Freidberg (1987) et Krall & Trivelpiece (1986).

Le but de la magnétohydrodynamique (MHD) est de décrire la dynamique d'un plasma, c'est-à-dire d'un gaz ionisé comportant des particules chargées, en présence d'un champ magnétique. Cette description induit des effets physiques extrêmement riches en raison de l'influence mutuelle du champ magnétique sur le fluide (force de Lorentz) et des mouvements du fluide sur le champ magnétique (effet d'induction). Dans cette section, je commencerai par caractériser quelques quantités caractéristiques du plasma, puis je dériverai les équations à un fluide dans l'approximation MHD.

§ 6.1. Quelques grandeurs caractéristiques d'un plasma

- **Sphère de Debye, paramètre plasma.** En astrophysique, les gaz sont essentiellement composés d'hydrogène. Ainsi, on considère la plupart du temps que les plasmas sont composés exclusivement de protons et d'électrons. Chacune de ces particules induit donc un champ électrique via le potentiel coulombien :

$$\phi(r) = \frac{q}{r} \quad (6.2)$$

où $q = \pm e$ est la charge de la particule considérée. Les électrons se voient donc naturellement attirés par les protons, et un équilibre s'établit entre l'agitation thermique des électrons et le potentiel coulombien au voisinage des protons, de sorte que le potentiel effectif des protons se voit écranté par les électrons et prend une expression de la forme :

$$\phi(r) = \frac{q}{r} \exp(-r/\lambda_D) \quad (6.3)$$

où λ_D est la longueur d'écrantage de Debye que l'on écrira (cf par exemple Krall & Trivelpiece 1986) :

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{8\pi n e^2} \right)^{1/2} \quad (6.4)$$

où n est la densité d'électrons, T est la température et k est la constante de Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$).

Cette longueur d'écrantage permet alors de définir le paramètre plasma g , quantifiant le nombre d'électrons présents dans la sphère de Debye :

$$g = \frac{1}{n\lambda_D^3} \propto \frac{n^{1/2}}{T^{3/2}} \quad (6.5)$$

Pour que l'effet d'écrantage de Debye soit réel, il faudra que l'on ait suffisamment d'électrons dans la sphère de Debye pour utiliser le traitement statistique précédent, c'est à dire $g \ll 1$.

⁴On a supposé ici que la distribution de vitesse des électrons suivait une maxwellienne. Cette approximation sera systématiquement utilisée dans la suite.

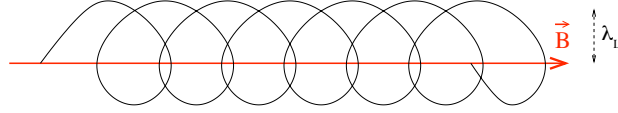


FIG. 8. Trajectoire d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique : on observe une rotation autour du champ à la fréquence $\omega_{c\alpha}$, ce qui permet de définir le rayon de Larmor λ_L .

• **Fréquence cyclotron, Rayon de Larmor.** Considérons une particule chargée α ayant une vitesse v_α en présence d'un champ magnétique B . Son mouvement se décrit aisément avec les équations de la dynamique :

$$m_\alpha \frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{q_\alpha}{c} v_\alpha \times B \quad (6.6)$$

On obtient alors un mouvement caractéristique en spirale autour des lignes de champ B (voir fig. 8), dont la fréquence de rotation est donnée par la fréquence cyclotron :

$$\omega_{c\alpha} = \frac{q_\alpha B}{m_\alpha c}, \quad (6.7)$$

et qui définit un rayon caractéristique de giration : le rayon de Larmor,

$$\lambda_L = \frac{m_\alpha c v_\perp}{q_\alpha B} \quad (6.8)$$

où v_\perp est la vitesse de la charge perpendiculairement au champ magnétique.

• **Fréquence plasma.** Considérons une distribution arbitraire d'électrons et de protons à l'équilibre, et déplaçons l'ensemble des électrons. Comme les électrons sont nettement moins massifs que les protons, ces derniers ne se déplacent presque pas lors de ce mouvement. Ainsi, la distribution de protons donnera une force de rappel, et engendrera une oscillation des électrons autour de leur position initiale. On peut alors montrer que la fréquence d'oscillation des électrons est donnée par (Krall & Trivelpiece 1986) :

$$\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m_e} \right)^{1/2} \quad (6.9)$$

§ 6.2. Équations du mouvement des ions

Pour commencer, remarquons que l'on est en présence de 2 fluides distincts. On peut donc écrire séparément les équations de conservation de la masse et de de l'impulsion :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0 \quad (6.10)$$

$$n_\alpha m_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + n_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{V}_\alpha = -\nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{B}}{c} \right) - \sum_\beta n_\alpha m_\alpha (\mathbf{V}_\alpha - \mathbf{V}_\beta) \langle v_{\alpha\beta} \rangle \quad (6.11)$$

où V_α , m_α , q_α et n_α sont respectivement la vitesse moyenne, la masse, la charge et la densité numérique des particules α . J'ai par ailleurs introduit la force de Lorentz, un tenseur de pression \mathcal{P}_α représentant les collisions de particules de la même espèce, et un terme de frottement visqueux pour les collisions entre particules d'espèces différentes, quantifié par le taux de collision $\langle v_{\alpha\beta} \rangle$.

Le passage à une description monofluide se fait en utilisant des variables reflétant les propriétés moyennes du fluide :

- La densité massique

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i \quad (6.12)$$

- La densité de charge

$$\rho_q = e(n_i - n_e) \quad (6.13)$$

- La vitesse dans le centre de masse

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \quad (6.14)$$

- La densité de courant totale

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{V}_i - n_e \mathbf{V}_e) \quad (6.15)$$

- La pression dans le référentiel du centre de masse, définie à partir des pressions ioniques et électroniques dans le centre de masse :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_i^{CM} + \mathcal{P}_e^{CM} \quad (6.16)$$

Il convient dès lors de faire plusieurs hypothèses sur les processus que l'on va étudier. Tout d'abord on supposera que ces processus ont des tailles typiques largement supérieures à la longueur de Debye, de sorte que l'on puisse supposer l'électroneutralité en tout point du fluide :

$$n_e = n_i \equiv n \quad (6.17)$$

De plus, on supposera que la vitesse de dérive des électrons par rapport aux ions $\mathbf{v}_d = \mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e$ est négligeable par rapport à la vitesse typique des ions \mathbf{V}_i . Ce dernier point permettra de décrire l'ensemble du plasma, ions et électrons, comme un seul fluide, où les collisions ion-électron sont suffisamment fréquentes pour obtenir une description statistiquement cohérente de l'ensemble. Le mouvement des électrons se ramènera alors simplement à la description du courant de conduction. Notons enfin qu'en pratique, le rapport m_e/m_i est beaucoup plus petit que 1, ce qui permettra de supposer que les ions dominent l'inertie du fluide.

Ces hypothèses permettent alors d'écrire $\rho_m \simeq \rho_i \equiv \rho$, $\mathbf{V} \simeq \mathbf{V}_i$, $\mathbf{J} \simeq en\mathbf{v}_d$ et d'obtenir une équation de conservation de la charge qui se réduit à la non divergence du courant. Le système d'équations final s'écrit alors sous la forme bien connue :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (6.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (6.19)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla \cdot \mathcal{P} \quad (6.20)$$

§ 6.3. Équation d'énergie, tenseur des contraintes

Pour résoudre le système précédent, il faut trouver une prescription adéquate pour la pression ionique \mathcal{P} . Dans le cas présent, on décomposera ce tenseur comme un terme de pression isotrope classique P et un tenseur de contraintes \mathcal{T} , ce que l'on notera :

$$\mathcal{P}_{ij} = P \delta_{ij} - \mathcal{T}_{ij} \quad (6.21)$$

Pour décrire précisément l'évolution de la pression cinétique P , il convient normalement d'écrire une équation pour l'énergie totale du système, comprenant l'évolution de l'énergie

interne, l'énergie cinétique et magnétique, ainsi que les effets de rayonnement, conduction thermique... Cependant, cette étude ne portera ni sur les effets de chauffage dus aux différents termes de dissipation, ni sur les processus radiatifs. Ainsi, par soucis de simplification, je ferai des hypothèses basiques sur les relations de clôture. Dans le cadre de cette étude, je supposerai donc que le gaz suit l'équation du gaz parfait $P = nkT$, et que son évolution énergétique peut être décrite par une équation isentropique :

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (6.22)$$

où γ est le coefficient adiabatique ($\gamma = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique). Remarquons toutefois qu'en toute rigueur, l'existence de phénomènes de dissipation entraînent naturellement une équation d'état où l'entropie n'est pas conservée. Cependant, comme nous ne considérerons pas les processus de refroidissement, les termes de dissipation n'entraîneront qu'un échauffement continu du fluide, ce qui n'est pas physiquement réaliste et pourra notamment entraîner une croissance de la vitesse du son qui sera problématique numériquement. Aussi, on négligera les termes de chauffage dans l'équation d'énergie de sorte que le fluide sera effectivement isentropique (sauf dans des cas très particuliers qui seront alors précisés).

D'autre part, on fera parfois l'hypothèse d'un gaz incompressible, ce qui revient à imposer :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (6.23)$$

La pression est alors un paramètre d'ajustement permettant de vérifier à tout instant l'hypothèse d'incompressibilité⁵. La deuxième partie du tenseur de pression généralisé \mathcal{P} fait intervenir un tenseur des contraintes, que l'on écrira en suivant Landau & Lifshitz (1959) sous la forme :

$$\mathcal{T}_{ij} = \eta_v \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right) + \zeta_v \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k}. \quad (6.24)$$

où l'on a fait intervenir le coefficient de viscosité dynamique de cisaillement classique η_v supposé constant dans tout le fluide, ainsi qu'une viscosité de compression ζ_v que l'on négligera.

§ 6.4. Loi d'Ohm

Lors de la dérivation des équations à un fluide, je n'ai pas traité la conservation de l'impulsion pour les électrons, car elle donne lieu à un résultat de nature différente des équations dynamiques classiques. Pour la dériver, on écrit la conservation de l'impulsion (6.11) pour les électrons, dans le référentiel du centre de masse (référentiel des ions) :

$$n m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -n e \left(\mathbf{E}^{CM} + \frac{\mathbf{V}_e}{c} \times \mathbf{B}^{CM} \right) - \nabla \cdot \mathcal{P}_e^{CM} - n m_e \mathbf{V}_e \langle v_{ie} \rangle \quad (6.25)$$

En remarquant que dans le référentiel des ions, $v_d = -\mathbf{V}_e$, l'équation du mouvement (6.25) revient à écrire en fonction du courant \mathbf{J} :

$$\mathbf{E} = \frac{m_e \langle v_{ie} \rangle}{n e^2} \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c n e} - \frac{\nabla \cdot \mathcal{P}_e}{n e} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (6.26)$$

où l'on reconnaîtra une expression généralisée de la loi d'Ohm dans le référentiel des ions. En particulier, on verra dans le membre de droite différents termes qui peuvent être plus ou moins négligés suivant la physique que l'on veut représenter. Ainsi, le premier terme est le terme de

⁵On peut voir la pression dans le cas incompressible comme un multiplicateur de Lagrange.

résistivité ohmique, bien connu dans la loi d'Ohm classique $U = RI$. Le second terme décrit l'effet Hall, formant un champ électrique perpendiculaire au courant et au champ magnétique (champ de Hall). Le troisième terme est un effet de pression électronique pouvant engendrer un courant. Enfin le dernier terme concerne un effet inertiel des électrons, pouvant par exemple être à l'origine des oscillations plasma décrites précédemment. Notons que dans le cas d'un milieu faiblement ionisé, on devrait rajouter un terme de frottement entre les espèces chargées et les espèces neutres sous la forme d'un nouveau terme de résistivité, dit de diffusion ambipolaire.

La clôture du système d'équation précédent nécessite de connaître la dynamique du champ électrique E en fonction des mouvements du fluide V ainsi que des déplacements de charge J . On fait donc appel aux équations de Maxwell.

§ 6.5. Équations de Maxwell

De manière tout à fait générale, les équations de Maxwell s'écrivent dans le vide, en utilisant le système d'unités de Heaviside-Lorentz (Jackson 1975) :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_q, \quad (6.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.29)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.30)$$

On remarquera que les équations (6.28) et (6.30) impliquent que le terme de courant de déplacement [dernier terme de l'équation 6.30] est d'ordre V^2/c^2 par rapport aux autres termes de l'équation, et il sera donc négligé dans une étude non relativiste⁶. On retrouvera alors le théorème d'Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (6.31)$$

Les équations (6.28) et (6.31) permettent finalement de fermer le système d'équation.

⁶Cette approximation est cohérente avec l'hypothèse d'électronneutralité. En effet, la divergence de (6.30) nous permet de retrouver l'équation de conservation de la charge (6.19)

§ 6.6. Les équations de la MHD

Pour conclure cette section, on obtient les équations de la MHD que l'on écrira de la manière la plus générale possible dans le référentiel de l'observateur :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (6.32)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (6.33)$$

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (6.34)$$

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{cne} - \frac{\nabla \cdot \mathcal{P}_e}{ne} + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (6.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (6.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.38)$$

où l'on a utilisé les formules de transformation du champ électrique dans un changement de référentiel Galiléen : $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}/c$ et où $\sigma = ne^2/m_e \langle v_{ie} \rangle$, est la conductivité du milieu. On peut alors simplifier ce système suivant le système physique considéré, ce que je vais faire pour les disques d'accrétion.

§ 7. Application des équations MHD à la physique des disques d'accrétion

§ 7.1. Vérification des approximations MHD

Comme on vient de le voir, les équations de la MHD font appel à une série d'approximations que l'on va vérifier pour notre étude. Tout d'abord, il faut noter que les ordres de grandeurs varient suivant les objets astrophysique que l'on considère. Ainsi, on trouvera

$$n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (7.39)$$

$$T \sim 2 \times 10^3 \text{ K} \quad (7.40)$$

à une distance $r \simeq R_\odot \sim 10^{12} \text{ cm}$ de l'étoile centrale pour un disque protostellaire, et :

$$n \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3} \quad (7.41)$$

$$T \sim 2 \times 10^4 \text{ K} \quad (7.42)$$

à $r \simeq 300r_g \sim 10^{16} \text{ cm}$ pour un disque autour d'un trou noir de $10^8 M_\odot$ (Ferreira 1995). En pratique, ces valeurs pourront varier de plusieurs ordres de grandeur selon l'endroit du disque que l'on considère. Aussi, les valeurs que je propose ici sont données à titre purement informatif et on pourra faire appel à un model complet de disque pour obtenir des profils physiques précis.

Les phénomènes que l'on cherche à décrire auront une taille typique de l'ordre de l'échelle de hauteur H du disque, c'est à dire 10^{-1} à 10^{-3} fois la distance r de l'objet central, et un temps typique de l'ordre de la période orbitale Ω_K^{-1} , soit 10^5 s pour une étoile jeune et 10^7 s pour un trou noir supermassif. Par ailleurs, on supposera que l'amplitude du champ magnétique dans ces objets est voisine de l'équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie magnétique, soit $B^2 \sim P$. Le calcul des grandeurs caractéristiques du plasma présent dans ces disques (Tab. 1) montre alors

clairement les approximations MHD sont vérifiées à un très bon niveau d'approximation pour les échelles typiques des disques.

	Disque protostellaire	Trou noir supermassif
λ_D (cm)	7×10^{-4}	2×10^{-6}
g	0,3	10^{-2}
ω_{ci} (Hz)	10^4	5×10^4
ω_{pe} (Hz)	10^{11}	10^{11}
v_d (cm/s)	10^{-3}	3×10^{-10}

TAB. 1. Évaluation des quantités caractéristiques du plasma dans deux classes de disque d'accrétion typiques.

§ 7.2. Approximation de la loi d'Ohm

De plus, ces quantités caractéristiques permettent d'estimer l'ordre de grandeur relatif des différentes composantes de la loi d'Ohm. On obtient ainsi, en comparant les termes du membre de droite de (6.35) à $\mathbf{V} \times \mathbf{B}/c$, les ordres de grandeur suivants :

Résistivité:

$$\frac{|\sigma \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J}c|} \sim \frac{L_0 V_0 \sigma}{c^2} \quad (7.43)$$

Effet Hall:

$$\frac{|ne \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{J} \times \mathbf{B}c|} \sim \omega_{ci} t_0 \frac{V_0^2}{V_A^2} \quad (7.44)$$

Pression électronique:

$$\frac{|ne \mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{c |\nabla \cdot \mathcal{P}_e|} \sim \omega_{ci} t_0 \frac{V_0^2}{C_s^2} \quad (7.45)$$

Inertie électronique:

$$\frac{e^2 n |\mathbf{V} \times \mathbf{B}|}{m_e c |\partial \mathbf{J} / \partial t|} \sim \frac{L_0^2 \omega_{pe}^2}{c^2} \quad (7.46)$$

où l'on a défini la vitesse d'Alfvén $V_A^2 = B^2 / 4\pi n m_i$ et la vitesse du son $C_s^2 = \gamma p / \rho_m$. On pourra notamment reconnaître dans l'ordre de grandeur de la résistivité le nombre de Reynolds magnétique, que l'on utilisera dans la suite. En utilisant les valeurs de conductivité de Spitzer (1962)⁷ d'obtenir :

$$\sigma = \frac{1,37 \times 10^8 T^{3/2}}{\ln \Lambda} \text{ s}^{-1} \quad (7.47)$$

avec le logarithme coulombien $\ln(\Lambda) \sim 6$, on obtient pour les disques les ordres de grandeurs du tableau (2).

Ainsi, il semble que tous les termes que l'on a considérés sont négligeables dans la loi d'Ohm. En ce sens, la plupart des études MHD effectuées sur ces objets se sont placées dans le cadre de la MHD « idéale », c'est à dire en fixant à 0 le membre de droite de (6.35). Cependant, comme je le montrerai à travers quelques exemples, les termes dissipatifs peuvent avoir une certaine importance sur les grandes échelles. En particulier, dans le cas d'un gaz faiblement ionisé, la conductivité peut diminuer notablement, et entraîner l'apparition de zones non couplées au champ magnétique ou *dead zones* (Gammie 1996).

⁷Approximation très grossière dans les disques d'étoiles jeunes, mais qui n'est destinée qu'à illustrer mes propos

Terme	Disque protostellaire	Trou noir supermassif
Résistivité	2×10^9	2×10^{16}
Effet Hall	10^9	5×10^{11}
Pression électronique	10^9	5×10^{11}
Inertie électronique	10^{23}	10^{31}

TAB. 2. Évaluation de l'ordre de grandeurs des termes présents dans la loi d'Ohm.

Notons que le terme de diffusion ambipolaire (collisions entre les particules neutres et les ions) pouvant apparaître dans les milieux qui ne sont pas totalement ionisés n'a pas été pris en compte dans ce modèle simplifié. On pourra ainsi trouver une quantification précise de ces termes pour les disques protoplanétaires dans Balbus & Terquem (2001) et Kunz & Balbus (2004).

Dans ce travail, j'ai choisi d'utiliser une formulation MHD résistive, en négligeant les termes Hall et de pression magnétique (l'inertie magnétique étant toute à fait négligeable dans les plasma astrophysiques). On notera donc ici que l'approche MHD résistive est une approche incomplète du problème, car les termes Hall, de pression électronique ou de diffusion ambipolaire dans les milieux faiblement ionisés (Salmeron 2004) peuvent être du même ordre de grandeur que le terme résistif. Elle reste cependant la plus simple et permet d'obtenir une première approche du rôle des termes dissipatifs dans les phénomènes de transport des disques. Pour finir, on écrira donc l'ensemble des équations de la MHD, en supposant que la résistivité est constante dans tout le fluide⁸ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (7.48)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (7.49)$$

$$\frac{d}{dt} P \rho^{-\gamma} = 0 \quad (7.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (7.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (7.52)$$

où l'on a noté $\eta = c^2/4\pi\sigma$ le coefficient de résistivité du fluide. C'est ce système d'équation que j'utiliserai dans la suite de ce manuscrit pour décrire la dynamique des disques d'accrétion.

2. Modèle local, approximation de Hill

§ 8. Nécessité d'un modèle local

La présente étude est axée sur la turbulence locale dans les disques astrophysiques. On entend par turbulence locale, une turbulence dont la longueur de cohérence typique n'excède pas quelques fois la hauteur locale du disque H . Dans cette approche, on suppose donc que le rapport d'anisotropie de la turbulence mise en jeu est voisin de 1. Dans le cas contraire, on sera contraint de se ramener à une modélisation globale du disque. Dans la mesure où les disques

⁸Cette hypothèse n'est pas forcément vérifiée pour un gaz ionisé, mais nous la supposons valide tout au long de ce manuscrit.

que l'on étudiera sont froids, le rapport H/R sera compris entre 10^{-1} et 10^{-3} , de sorte que la taille typique des mouvements turbulents sera négligeable par rapport au rayon du disque.

Avec cette approche, on peut obtenir des équations locales cartésiennes du disque : c'est le système de Hill (1878), développé initialement pour étudier les mouvements de la lune. Ce système a été utilisé avec succès pour étudier d'autres objets tels que les bras spiraux galactiques (Goldreich & Lynden-Bell 1965), les anneaux de planètes (Wisdom & Tremaine 1988) et les écoulements en rotation différentielle tels que les disques (Narayan *et al.* 1987).

§ 9. Développement des équations locales

La dérivation complète des équations du modèle de Hill est donnée en Annexe A. On peut néanmoins les obtenir par une approche qualitative de la physique d'un disque d'accrétion.

Pour cela, on se positionne à un point de référence situé à un rayon R_0 de l'objet central et on suppose que les processus étudiés ont une taille de l'ordre de $H \ll R_0$. Cette première approximation permet de négliger les termes de courbure d'ordre H/R_0 . On se place alors en corotation avec le disque en R_0 , avec un vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega} = \Omega(R_0)\mathbf{e}_z$. Ceci introduit une force de Coriolis ainsi qu'un terme centrifuge, lequel est supposé équilibrer l'attraction gravitationnelle en R_0 . Deux termes gravitationnelles restent alors dans ce système : un terme de marée, dû à la variation de la force gravitationnelle avec le rayon, ainsi qu'un terme d'attraction vertical qui maintient le disque confiné. On aboutit finalement au système de Hill que l'on écrit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla\right)\mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho}\nabla\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B} + 2\Omega_0 S y \mathbf{e}_y \\ &\quad - 2\Omega_0 \times \mathbf{U} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (9.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta\Delta\mathbf{B} \quad (9.54)$$

$$\frac{d}{dt}P\rho^{-\gamma} = 0 \quad (9.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (9.56)$$

où l'on a noté le potentiel gravitationnel ψ et $S = -(rd\Omega/dr)_{R_0}$ le cisaillement moyen de l'écoulement laminaire dû à l'effet de marée gravitationnelle. On vérifiera en effet qu'une solution des équations précédentes est $\mathbf{U} = S y \mathbf{e}_x$. De plus, pour un écoulement Képlerien ($\Omega \propto r^{-3/2}$), on aura $S = 3/2\Omega$.

Ainsi, l'étude locale de la dynamique d'un disque d'accrétion revient à étudier la dynamique d'un écoulement de Couette plan tournant magnétisé et stratifié verticalement. Remarquons cependant que dans cet écoulement, le cisaillement est imposé par la force gravitationnelle via le terme $S y \mathbf{e}_y$ du système d'équations précédent. Il s'agit donc d'un forçage *en volume* de l'écoulement. Ceci est différent de l'écoulement de Couette plan classique où le cisaillement est introduit par les conditions aux limites (murs) et est transmis dans le fluide par une viscosité moléculaire ou turbulente. Aussi, les états turbulents quasi-stationnaires qui peuvent être observés dans les écoulements de Couette, et qui montrent un profil de vitesse déformé n'existeront pas dans les écoulements locaux que je discute ici.

On comprend aussi par cette remarque que la source d'énergie de l'écoulement vient de ce terme de forçage et donc *in fine* de l'énergie gravitationnelle. Ainsi, un écoulement turbulent

qui tire son énergie du cisaillement finit par enlever de l'énergie gravitationnelle au fluide en la convertissant en chaleur : le gaz tombe. Cet effet d'accrétion n'est néanmoins pas représenté dans le système de Hill car il fait intervenir les termes de courbure qui ont été négligés.

Remarquons finalement que je n'ai pas discuté les conditions aux limites à utiliser dans ce système. Physiquement, ces conditions aux limites sont difficiles à déterminer car il faut définir une coupure, plus ou moins brutale, dans la direction radiale du disque. Idéalement, les conditions aux limites ne devraient pas avoir d'influence sur l'écoulement local. Malheureusement, aucune des conditions aux limites envisageable (conditions aux limites libres, rigides, périodiques-cisaillées) n'est exempte d'effet parasite sur l'écoulement. Ainsi, lorsque c'est possible, je me bornerai à utiliser différents types de conditions aux limites et à tester, par comparaison, leur influence sur les caractéristiques de l'écoulement. Cette approche permettra, à défaut de mieux, d'estimer l'erreur causée par ces effets de bords sur les résultats.

§ 10. Equilibre vertical, compressibilité

Au début de cette section, j'ai supposé que les mouvements turbulents devaient avoir une taille typique de l'ordre de l'échelle verticale du disque H . Cette échelle peut être obtenue d'après l'équation du mouvement (9.53) en écrivant l'équilibre hydrostatique vertical :

$$\partial_z P = -\rho \partial_z \psi \quad (10.57)$$

avec le potentiel ψ :

$$\psi(r, z) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (10.58)$$

où M est la masse de l'objet central et G la constante de gravitation. Ainsi, on peut écrire au rayon de référence R_0 et pour $z \ll R_0$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \simeq \frac{z}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} = z \Omega_0^2 \quad (10.59)$$

Si on suppose que le disque est isotherme verticalement⁹, c'est à dire $P = c_s^2 \rho$ où c_s est la vitesse du son, on obtient l'équilibre hydrostatique :

$$P = \alpha \exp\left(-\frac{z^2 \Omega_0^2}{2c_s^2}\right) \quad (10.60)$$

Ceci nous permet alors de définir une échelle de hauteur $H = c_s \Omega_0^{-1} \simeq c_s S^{-1}$, qui servira d'échelle typique pour les phénomènes turbulents (cette échelle étant la seule échelle caractéristique du problème local, la taille des processus étudiés sera *nécessairement* reliée à cette échelle). Par ailleurs, la source d'énergie cinétique pour les mouvements turbulents dans le système d'équations de Hill (9.53)-(9.54) sera essentiellement le cisaillement S , dont on a vu qu'il prenait sa source dans l'énergie gravitationnelle du disque. Ainsi, pour des mouvements d'une taille de l'ordre de H , on s'attend naturellement à des vitesses de l'ordre de la vitesse du son, ce qui signifie une turbulence approximativement subsonique. Ce résultat est corroboré par les

⁹Cette hypothèse est fréquente dans l'étude des disques d'accrétion minces, et justifiable sur la base de l'examen des échelles de temps verticale et radiale

valeurs de α fournies par les observations. En effet, pour des mouvements turbulents d'une taille typique H et d'une vitesse typique v , on peut estimer un coefficient de viscosité turbulente par :

$$\tilde{\nu} \sim vH. \quad (10.61)$$

La comparaison avec la prescription $\nu_t = \alpha c_s H$ montre alors clairement que les contraintes observationnelles $\alpha < 1$ impliquent une turbulence subsonique. En raison de ces résultats, je ferai la plupart du temps l'hypothèse que l'écoulement est incompressible.

Remarquons cependant qu'en pratique, les effets de compressibilité devraient générer des ondes sonores ou des chocs, entraînant une dissipation plus rapide de l'énergie que dans le cas incompressible. Ainsi, on pourra considérer que les résultats sur l'efficacité de la turbulence incompressible sont des valeurs « hautes » si on les compare avec l'écoulement réel.

3. Méthodologie

Pour résumer ce chapitre, on trouvera sur la figure (9) l'écoulement typique décrit par les équations (9.53) et (9.54). On y retrouvera le cisaillement de vitesse S , la stratification verticale $\mathbf{g} = -z\Omega_0^2 \mathbf{e}_z$ et la rotation $\Omega_0 \mathbf{e}_z$. Le champ magnétique n'a pas été représenté et il pourra adopter une topologie *a priori* quelconque.

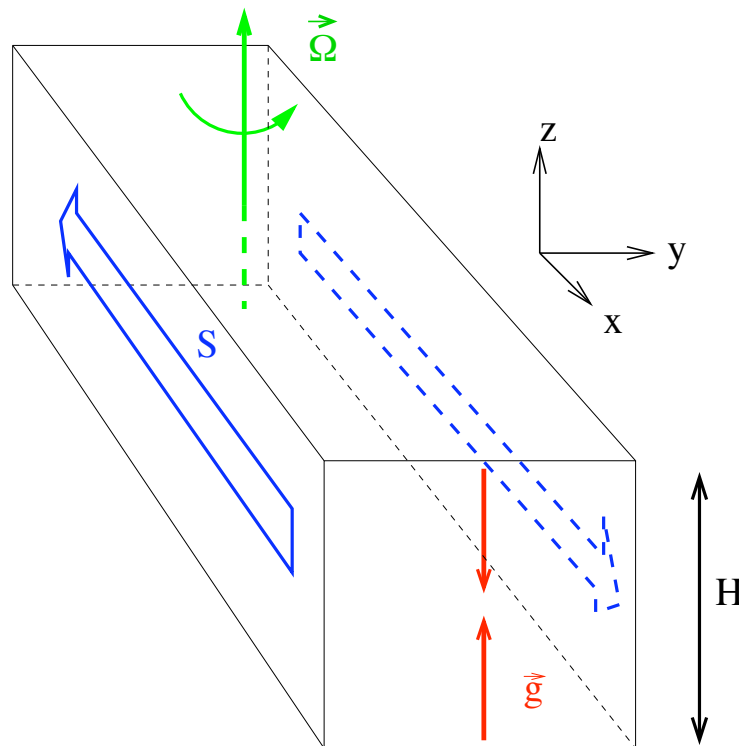


FIG. 9. Écoulement caractéristique décrit par le système de Hill, avec en rouge la stratification verticale, en bleu le cisaillement de vitesse et en vert la rotation.

Il semble clair que l'on ne peut pas prétendre maîtriser une simulation en intégrant tous les phénomènes physiques mis en avant par le modèle de Hill. Cette remarque peut aussi s'appliquer aux calculs analytiques, ainsi qu'aux manipulations. Aussi, j'adopterai ici une

approche par étapes : j'inclurai progressivement les effets physiques de l'écoulement décrit par le modèle de Hill à un écoulement « minimal », qui sera l'écoulement de Couette tournant, combinant uniquement cisaillement et rotation. Cette écoulement me permettra d'étudier l'instabilité hydrodynamique sous-critique (partie 3). Par la suite, j'ajouterai à l'écoulement minimal les effets de stratification verticale. Cet écoulement donnera lieu à une nouvelle instabilité potentielle : l'instabilité strato-rotationnelle (partie 4). Dans la cinquième partie, j'éliminerai la stratification du problème et j'inclurai le couplage avec un champ magnétique. Ce dernier élément mènera alors à l'instabilité magnéto-rotationnelle.

Remarquons pour finir que la plupart de ces études feront appels à des méthodes numériques variées, dont certaines ont été développées spécifiquement pour ce travail. Aussi, je présenterai dans la deuxième partie de ce manuscrit les méthodes numériques utilisées dans les parties suivantes, en insistant sur la pertinence physique des algorithmes employés.

